קלאסית 2 - סיכום

I אלקטרוסטטיקה

I - חוק קולון - Coulomb ($\bar{F}(\bar{r})$):

$$\boxed{\bar{F}_2 = K\frac{q_1 q_2}{r_{21}^2}\hat{r}_{21}}$$

כאשר $\bar{F}_2$ הנו הכח שפועל על החלקיק השני.

גודלו של קבוע הפרופורציה K תלוי ביחידות:

cgs: $K=1$

$\Rightarrow$ מטען אלקטרון $= [esu] = \left[\left(\frac{gr\cdot cm^3}{s^2}\right)^{-2}\right]$

MKS: $\boxed{K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9\times10^9\ \frac{N\cdot m^2}{Coul^2}}$

$\Rightarrow \boxed{e \simeq 4.8\times10^{-10}\ esu = 1.6\times10^{-19}\ Coul}$

זה חוק אדיטיבי: הכוח השקול שפועל על חלקיק מסוים הנו סכום הכוחות שמפעילים עליו כל אחד מהחלקיקים האחרים:

$$\boxed{\bar{F}_q(\bar{r}) = \sum_{j=1}^{N}\frac{q q_j}{|\bar{r}-\bar{r}_j|^2}(\widehat{\bar{r}-\bar{r}_j})}$$

- אנרגיה פוטנציאלית חשמלית (U(r)):

הכח החשמלי הנו כח מרכזי (תלוי רק במרחק בין החלקיקים) ולכן הוא משמר. לכן העבודה שדרושה להזיז מטען מנק' A לנק' B אינה תלויה במסלול. האנרגיה הפוטנציאלית החשמלית, כמו במקרה של האנרגיה הפוטנציאלית הכובדית, מוגדרת דרך העבודה:

$$\boxed{W_{A-B} = -\int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{l} = -\int_{r_A}^{r_B}\frac{q_1q_2}{r'^2}dr' = \frac{q_1q_2}{r_B} - \frac{q_1q_2}{r_A} \equiv U(r_B) - U(r_A)}$$

בדרך כלל נוח להגדיר את נק' האפס של האנרגיה הפוטנציאלית באינסוף:

$$U(r) = \frac{q_1q_2}{r} + c \xrightarrow{r\to\infty} c$$

בדרך כלל נבדוק כמה אנרגיה צריך כדי להביא חלקיק מאינסוף לנקודה מסוימת R, ובאופן כללי c יתבטל:

$$W_{\infty\to r} = \lim_{r_A\to\infty}\left(\frac{q_1q_2}{R} - \frac{q_1q_2}{r_A}\right) = \frac{q_1q_2}{R} \equiv U(R)$$

עבור מספר חלקיקים כלשהו, מחשבים בעקרון הסופרפוזיציה:

$$\boxed{U = \frac{q_1q_2}{r_{21}} + \frac{q_1q_3}{r_{31}} + \dots = \sum_{\text{כל הזוגות}}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}}$$

יחידות: cgs: $[U] = erg$; MKS: $[U] = J$.

- שדה חשמלי ($\bar{E}(\bar{r})$):

$$\boxed{\bar{E}(\bar{r}) \equiv \frac{1}{q}\bar{F}(\bar{r})}$$

$\bar{E}(\bar{r})$ הנו שדה וקטורי שמתאר את הכח שהיה מופעל על מטען q בקונפיגורציית מטענים $q_1,\dots,q_n$ כלשהי

עבור קונפיגורציה בדידה:

$$\boxed{\bar{E}(\bar{r}) = \sum_{j=1}^{N}\frac{q_j}{|\bar{r}-\bar{r}_j|^2}(\widehat{\bar{r}-\bar{r}_j})}$$

עבור התפלגות מטען רציפה:

$$\boxed{\bar{E}(\bar{r}) = \int_V\frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}(\widehat{\bar{r}-\bar{r}'})\,d\bar{r}'}$$

יחידות: cgs: $[E] = \frac{dyne}{esu} = \frac{statvolt}{cm}$; MKS: $[E] = \frac{N}{coul} = \frac{volt}{m}$

- <u>פוטנציאל חשמלי</u> ($\varphi(\bar r)$):

התוספת לאנרגיה הפוטנציאלית אם נביא מטען יחידה חיובי מאינסוף לנקודה $\bar r$.

את $\varphi(\bar r)$ אפשר להגדיר דרך האנרגיה:

$$\boxed{W_{\infty\to\bar r}=U(\bar r)=\sum_{j=1}^{N}\frac{qq_j}{|\bar r-\bar r_j'|}\equiv q\,\varphi(\bar r)}$$

או דרך השדה החשמלי:

$$\boxed{\varphi_B-\varphi_A=-\int_A^B\bar E\,d\bar s=\sum_{j=1}^{N}\frac{q_i}{|\bar r_B-\bar r_j'|}-\sum_{j=1}^{N}\frac{q_i}{|\bar r_A-\bar r_j'|}}$$

ועבור התפלגות מטען רציפה:

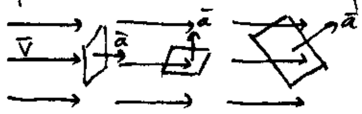
$$\boxed{\varphi(\bar r)=\int\frac{\rho(\bar r')}{|\bar r-\bar r'|}d^3r'}$$

<u>יחידות</u>: $Volt\simeq\frac{1}{300}\,statvolt$; <u>MKS</u>: $\frac{J}{Coul}\equiv volt$; <u>cgs</u>: $\frac{erg}{esu}\equiv statvolt$

II <u>חוק גאוס</u>

נגדיר <u>שטף (flux): Φ</u> בתור "כמות" השדה שעוברת דרך משטח כלשהו ליחידת זמן.

בחישוב השטף תמיד ניקח את רכיב השדה <u>שניצב</u> למשטח:



השטף של שדה חשמלי יוגדר כ:

$$\boxed{\Phi=\oint_S\bar E\cdot d\bar a}$$

- <u>מטען מחוץ למעטפת</u>: כאשר המטען החשמלי מוצב מחוץ למשטח, <u>השטף החשמלי דרך המשטח יהיה אפס</u> (יש שטף כניסה ושטף יציאה שמבטלים זה את זה).

- <u>מטען מוקף במעטפת</u>: עבור כל סוג משטח שמקיף מטען חשמלי, <u>גאוס מצא שהשטף הוא</u>:

$$\boxed{\Phi=\oint\bar E\cdot d\bar a=4\pi Q_{enc}}$$

כאשר Q_{enc} הוא כמות המטען בתוך המשטח.

ועבור התפלגות מטען רציפה, ניתן לרשום:

$$\boxed{\Phi=\oint\bar E\cdot d\bar a=4\pi\int_V\rho\,dV=4\pi Q_{enc}}$$

כיוון שבדרך-כלל אנחנו יודעים כמה מטען קיים בתוך המשטח, נוכל <u>לחשב את השדה החשמלי שאותו מטען יוצר:</u>

1) "עוטפים" את המטען במעטפת גאוסית (בד"כ כדור או גליל, תלוי בגאומטריה של המטען).

2) מחשבים את השטף דרך אותה מעטפת, בהתעלמות מהשדה - מחשבים רק את השטח דרכו השטף יעבור.

3) משווים ל- $4\pi Q_{enc}$ ומחלצים את E.

- <u>משפט גאוס</u>: קושר בין אינטגרל משטחי לבין אינטגרל נפחי:

$$\boxed{\Phi=\oint_S\bar E\cdot d\bar a=\int_V\bar\nabla\cdot\bar E\,dV}$$

III קשרים בין השדה, הפוטנציאל והאנרגיה

- שדה ופוטנציאל:

$$1)\quad \varphi_B-\varphi_A=-\int_A^B \bar{E}\,d\bar{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{E}(\bar{r})=-\bar{\nabla}\varphi(\bar{r})}$$

- שדה וצפיפות מטען:

$$2)\quad \Phi=\oint_S \bar{E}\,d\bar{a}=\int_V \bar{\nabla}\cdot\bar{E}\,dV=4\pi\int_V \rho\,dV \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{E}(\bar{r})=4\pi\rho(\bar{r})}$$

זהו חוק גאוס הדיפרנציאלי. נשים לב שזהו ביטוי מקומי שנכון לכל $\bar{r}$, ולא לכל המרחב.

- פוטנציאל וצפיפות מטען: משוואת פואסון:

$$3)\quad \left.\begin{aligned}\bar{E}&=-\bar{\nabla}\varphi\\ \bar{\nabla}\cdot\bar{E}&=4\pi\rho\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\nabla^2\varphi=-4\pi\rho}$$

באזור חסר מטענים נקבל ממשוואת פואסון את משוואת לפלס (הרחבה בהמשך): $\boxed{\nabla^2\varphi=0}$

$$4)\quad U=\sum_{\text{הזוגות}}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_j}{r_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\,\varphi^{(1)}(\bar{r}_i)$$

נשים לב פה לשני דברים: 1) ה־$\frac{1}{2}$ מופיע כדי לבטל ספירה כפולה של הזוגות.

2) $\varphi^{(1)}(\bar{r}_i)$ הוא הפוטנציאל שנוצר מכל המטענים פרט ל־q_i.

עבור התפלגות מטען רציפה נקבל:

$$5)\quad \boxed{U=\frac{1}{2}\int_V \rho(\bar{r}')\,\varphi(\bar{r}')\,d^3r'}$$

פה כתבנו את הפוטנציאל הכולל $\varphi(\bar{r})$, כולל תרומת אלמנט המטען בנקודה $\bar{r}$.

- אנרגיה ופוטנציאל: מהצבת משוואת פואסון במשוואה (5) נקבל:

$$6)\quad \boxed{U=-\frac{1}{8\pi}\int_V \varphi\cdot\nabla^2\varphi\,dV}$$

- אנרגיה ושדה: מתוך משוואה (6) ניתן לקבל:

$$7)\quad \boxed{U=\frac{1}{8\pi}\int_V E^2\,dV+\frac{1}{8\pi}\int_S \varphi\bar{E}\cdot d\bar{a}}$$

הנפח V הוא תוצר של חוק גאוס - זו המעטפת שדרכה מחשבים את השטף. לכן אם נגדיל את V, התשובות הבסיסיות לא אמורות להשתנות. כשנגדיל מאוד את V נקבל שהביטוי השני, שמחושב על שפת הכדור, שואף לאפס:

$$\frac{1}{8\pi}\varphi(R)E(R)\int_{\text{שפת הכדור}}da=\frac{1}{8\pi}\cdot\frac{Q}{R}\cdot\frac{Q}{R^2}\cdot4\pi R^2=\frac{Q^2}{2R}\xrightarrow[R\to\infty]{}0$$

ולכן, אם נעבוד עם נפח שכולל את כל המרחב נוכל לרשום:

$$8)\quad \boxed{U=\frac{1}{8\pi}\int_{\text{כל המרחב}}E^2\,dV}$$

נוכל אפילו להגדיר צפיפות אנרגיה:

$$9)\quad \boxed{u(\bar{r})=\frac{E^2(\bar{r})}{8\pi} \quad\Rightarrow\quad U=\int_{\text{כל המרחב}}u(\bar{r})\,d\bar{r}}$$

עבור מערכת עם התפלגות מטען רציפה ומטענים נקודתיים, נעשה סופרפוזיציה:

$$10)\quad U=\frac{1}{2}\int_V \rho(\bar{r}')\,\varphi(\bar{r}')\,d^3r'+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\varphi_i$$

IV שאלות תיאורטיות

1) <u>היכן נמצאת האנרגיה?</u>

למרות שמדובר במושגים אבסטרקטיים (אנרגיה, שדות וכו'), יהיה לנו נוח לחשוב על האנרגיה כשייכת לשדה החשמלי, ולא למטענים (אחרת איך האנרגיה "עוברת" מנק' A לנק' B?).

2) <u>בעיית הסימן באנרגיה</u>

קיבלנו מספר ביטויים לאנרגיה. לפי משוואה (4) בחלק הקודם, עבור זוג מטענים עם סימן הפוך נקבל אנרגיה שלילית: $U = -\frac{q^2}{R} < 0$. אבל משוואה (8) תמיד חיובית: $U=\frac{1}{8\pi}\int E^2 dV > 0$.

הפתרון לבעיה הוא שכאשר מחשבים את האנרגיה לפי השדה החשמלי, עושים זאת על כל המרחב, ולכן לוקחים בחשבון את האנרגיה שהושקעה <u>ביצירת</u> קונפיגורציית המטענים, מה שלא עושים בחישוב לפי אותם מטענים נקודתיים.

3) <u>האנרגיה של מטען נקודתי</u>

חישוב פשוט מראה שהאנרגיה של מטען נקודתי $E(r) = \frac{Q}{r^2} \Rightarrow u(r) = \frac{q^2}{8\pi r^4}$

מתבדרת: $U = \int_0^\infty u(r)\cdot 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{2}\int_0^\infty \frac{dr}{r^2} = \infty$

למרות שלפי קוונטים האלקטרון הוא <u>כן</u> מטען נקודתי, באלקטרוסטטיקה קלאסית נתייחס לאלקטרון כמטען בעל רדיוס, שייקרא <u>הרדיוס הקלאסי</u>: עבור כדור הומוגני: $U = \frac{3}{5}\frac{e^2}{r_c}$

לפי איינשטיין: $U = m_e c^2$

ולכן, עד כדי קבוע נומרי: $\Rightarrow \boxed{r_c = \frac{e^2}{m_e c^2} \simeq 2.8\times10^{-13}\ cm}$

4) <u>אנרגיה הדדית</u>

כל מערכת מטענים אפשר לפרק לתת-מערכות, ואז לומר שהאנרגיה הכוללת של המערכת היא סכום האנרגיות העצמיות (U_1,U_2) של תת-המערכות, בתוספת האנרגיה שנובעת מהכח שפועל בין שתי תת-המערכות (U_{12}): $U=U_1+U_2+U_{12}$

אבל נשים לב שהשדה קצת יותר מורכב: $E^2 = (\bar{E}_1+\bar{E}_2)^2 = E_1^2+E_2^2+2\bar{E}_1\bar{E}_2$

נשים לב ש- $U_{12}=U_{21}$ ולכן אפשר תמיד לבחור לחשב את האנרגיה בצורה הפשוטה יותר. למשל, בכדור ומוט, כאשר: $U_{12} = \sum_{(1)} q_i \varphi_i^{(2)} = \sum_{(2)} q_j \varphi_j^{(1)} = U_{21}$

את הפוטנציאל של מוט קל לחשב, והכדור "יראה כמו מטען נקודתי" - כך קל למצוא האנרגיה ביניהם.

V מוליכים בשדה חשמלי

1) השדה בתוך מוליך מתאפס: $\bar{E}=0$.

כשמציבים מוליך בתוך שדה חשמלי, המטענים החופשיים בתוכו ינועו בהשפעת השדה, וייצרו שדה מנוגד. המטענים ימשיכו לנוע עד ששני השדות ישתוו בגודלם ויתבטלו.

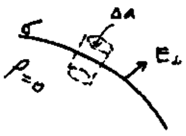
2) בתוך מוליך $\rho=0 \Leftarrow \bar{E}=0$.

3) אם קיים מטען, הוא נמצא על השפה.

4) בתוך מוליך (ועל שפת המוליך) הפוטנציאל קבוע: $\bar{E}=-\bar{\nabla}\varphi=0 \Rightarrow \varphi=const$

5) בדיוק מחוץ למוליך השדה החשמלי ניצב לשפת המוליך.

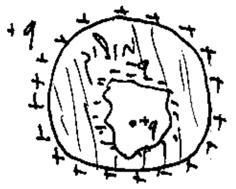
אם היה רכיב משיקי, המטענים היו נעים על השפה עד שאותו רכיב היה מתבטל.



$$\Phi=\Delta a\cdot E=4\pi(\sigma\cdot\Delta a) \Rightarrow \boxed{E_\perp=4\pi\sigma}$$

6) מיסוך –

- בתוך חלל שמוקף במוליך, השדה החשמלי יהיה אפס (אין מטענים).
- אם נציב מטען q בתוך החלל, הוא ישרה מטען -q על השפה הפנימית ומטען +q על השפה החיצונית. כך שבתוך החלל יהיה שדה של מטען נקודתי ומחוץ למוליך גם יהיה שדה של מטען נקודתי: $E(\bar{r})=\frac{q}{r^2}\hat{r}$.



VI משוואות לפלס ומטעני דמות

- יחידות הפתרון –

מבחינה מתמטית ניתן להוכיח {"הוכחה" בעמ' 21 של סיכומי השיעור} שעבור בעיות עם תנאי-שפה (מערכות של מוליכים בהן הפוטנציאלים על שפת המוליכים מהווים תנאי-שפה) שאם "נמצא" פתרון למשוואת לפלס $\nabla^2\varphi=0$, בהתחשב באותם תנאי-שפה, אז זה הפתרון היחיד לבעיה.

- משפט הממוצע

הערך של $\varphi(\bar{r})$ בכל נקודה $\bar{r}$ בתחום חסר מטענים (בו הפוטנציאל מקיים $\nabla^2\varphi=0$) שווה לממוצע של φ על-פני כדור ברדיוס כלשהו שמרכזו ב-$\bar{r}$. {הוכחה בעמ' 19}.

האינטגרל מבוצע על-פני כדור ברדיוס R שמרכזו ב-$\bar{r}$:

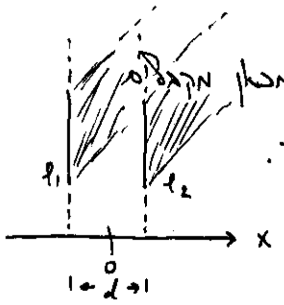
$$\boxed{\varphi(\bar{r})=\frac{1}{4\pi R^2}\int\varphi(\bar{r}')\,da}$$

מסקנה חשובה: ל-φ לא יכולה להיות נקודת מקס'/מינ' באיזור חסר מטענים.

⇐ לא ניתן לייצר שדה אלקטרוסטטי שיגרום לחלקיק טעון להישאר במקומו בשווי-משקל יציב באיזור חסר מטענים.

משוואת לפלס היא לא הדבר הכי סימפטי לפתור, ורוב הבעיות דורשות פתרון נומרי. אבל:

- משוואת לפלס במימד אחד



במימד אחד המשוואה המסובכת $\nabla^2\varphi=0$ הופכת לביטוי החמוד $\frac{d^2\varphi}{dx^2}=0$ ומכאן מקבלים באופן פשוט: $\boxed{\varphi(x)=ax+b}$. את a,b מוצאים לפי תנאי השפה.

נפתור את הפוטנציאל החשמלי בין שני משטחים אינסופיים מקבילים:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\varphi(-\tfrac{d}{2})=-a\tfrac{d}{2}+b\\ \varphi_2&=\varphi(\tfrac{d}{2})=a\tfrac{d}{2}+b\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}\Delta\varphi&\equiv\varphi_2-\varphi_1=ad\\ \varphi_1+\varphi_2&=2b\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}a&=\frac{\Delta\varphi}{d}\\ b&=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\equiv\bar\varphi\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\varphi(x)=\frac{\Delta\varphi}{d}x+\bar\varphi}$$

נשים לב: א) לכל R מתקיים: $\varphi(x)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+R)+\varphi(x-R)\right]$, וזה בעצם משפט הממוצע במימד אחד.

ב) השדה החשמלי: $\boxed{\bar{E}=-\nabla\varphi=-\frac{d\varphi}{dx}\hat{x}=-\frac{\Delta\varphi}{d}\hat{x}}$

- משוואת לפלס בשני מימדים

הפעם מקבלים משוואה קצת יותר מסובכת: $\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$, אבל עכשיו אפשר להשתמש בטריק נחמד ממשוואות מרוכבות:

כל ~~פונקציה~~ משתנה מרוכב z ניתן לתאר כהרכבה של חלק אמיתי וחלק דמיוני: $z=x+iy$

וכל פונקציה מרוכבת $f(z)$, שבנויה מחלקים ממשיים ודמיוניים, ניתן לתאר כ: $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$

מסתבר שגם $U(x,y)$ וגם $V(x,y)$ הן משוואות הרמוניות שמקיימות את משוואת לפלס.

כלומר: $$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=0\ ,\quad \frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}=0$$

לכן כל פונקציה $f(z)$ שניקח תפתור לנו שתי בעיות פיזיקליות - $U(x,y)$ הינו פתרון לבעיה אחת ו- $V(x,y)$ הינו פתרון לבעיה אחרת (בגלל יחידות הפתרון).

הרעיון פה הוא לקחת איזושהי פונקציה $f(z)$ ולראות לאיזה בעיה פיזיקלית היא מתאימה.

למשל, $f(z)=z^2$ נפתחת ל- $f(z)=z^2=U(x,y)+iV(x,y)=(x^2-y^2)+i(2xy)$

ומסתבר ש- $U(x,y)=x^2-y^2=const$ פותר את הבעיה של שדה חשמלי ליד פינה ישרה.

- שיטת הדמויות

מוליכים חשמליים הם גופים גאומטריים שווי-פוטנציאל. לכן, בבעיות שכוללות מטענים חשמליים ליד מוליכים (שגורמים להשראת מטענים על שפת המוליך, בהתפלגות מטען לא ידועה), ניתן להחליף את המוליך במטען דמות שימוקם כך שהאינטראקציה שלו עם המטען האמיתי תביא את אותו איזור שווה-פוטנציאל של המוליך.

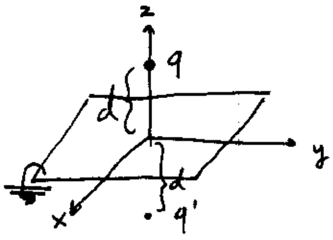
או במתמטית: נמצא מטען דמות כך שפתרון הבעיה הפשוטה יקיים את אותם תנאי-שפה של הבעיה המסובכת. עקב יחידות הפתרון, פתרון הבעיה הפשוטה יפתור את הבעיה המסובכת.

בצורה כזו אפשר לחשב את כל התכונות שלנו: פוטנציאל, שדה, כח ואנרגיה!

אבל, חשוב לזכור שכשפותרים את הבעיה הפשוטה מקבלים פתרון עבור כל המרחב. אנחנו ניקח מאותו פתרון רק את החלק שמחוץ למוליך.

*) נסתכל על שתי דוגמאות {דוגמאות נוספות ניתן למצוא בתרגול 6}:

1) מטען נקודתי מעל מוליך מישורי מוארק



משמעות ההארקה: $\varphi=0$ על המוליך.

נציב מטען דמות q' מתחת למוליך.

$\boxed{*}$**חשוב**: את מטעני הדמות תמיד מציבים בתוך/מאחורי המוליך, כדי "להסתיר" אותו מהמטען האמיתי. מטען הדמות לעולם לא "ימצא" ליד המטען המקורי, כי זה כבר לא יתאר את הבעיה המקורית שלנו (בה מטען הדמות לא קיים).

כדי לאפס את φ על המוליך נבחר $q'=-q$:

הפוטנציאל:
$$\varphi(\bar{r}) = \frac{q}{|\bar{r}-\bar{r}_+|} - \frac{q}{|\bar{r}-\bar{r}_-|} = \varphi(x,y,z) = \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}$$

בנוסף, השדה ליד מוליך ניצב לו:

המטען המושרה:
$$E_\perp = 4\pi\sigma$$

ובמקרה שלנו מתקבל מכיוון $\hat{z}$:
$$E_\perp = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}$$
$$\Rightarrow \sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = \ldots = -\frac{1}{2\pi}\frac{qd}{(x^2+y^2+d^2)^{1.5}}$$

כצפוי, מקבלים התפלגות שלילית עם נק' מקסימום בדיוק מתחת למטען הנקודתי, ב- $(x,y,z)=0$.

נעבור לקואורדינטות קוטביות: $\sigma(r,\theta) = -\frac{1}{2\pi}\frac{qd}{(r^2+d^2)^{1.5}}$ ונמצא את המטען הכולל על המוליך:

המטען הכולל:
$$q' = \int\sigma\, da = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} -\frac{qd}{2\pi(r^2+d^2)^{1.5}}\, r\, dr = -qd\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+d^2}}\right]_0^{\infty} = -q$$

פשוט מחשבים את הכח בין שני המטענים הנקודתיים:

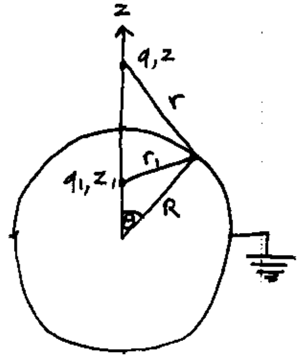
כח:
$$\bar{F} = -\frac{q^2}{4d^2}\hat{z}$$

אנרגיה:
$$U = -\int_{\infty}^{d} \bar{F}\cdot d\bar{s} = \int_{\infty}^{d} \frac{q^2}{4d^2}\, dz = -\frac{q^2}{4d}$$

זה רק חצי מהאנרגיה של שני מטענים נקודתיים: $U=-\frac{q^2}{2d}$, כיוון שאנחנו מסתכלים רק על חצי מהמרחב בבעיה המסובכת, ולא על כל המרחב כמו בבעיה הפשוטה. אז זהירות!

2) מטען נקודתי ליד כדור מוליך מוארק

נשים מטען דמות q_1 בתוך הכדור, על אותו הציר (כדי לשמור על סימטריה):



$\underline{1}$ $$\varphi = \frac{q}{r} + \frac{q_1}{r_1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q}{r} = -\frac{q_1}{r_1} \Rightarrow q_1 r = -q r_1 \Rightarrow q_1^2 r^2 = q^2 r_1^2$$

משפט הקוסינוסים:

$\underline{2}$ $$r^2 = R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta$$

$$r_1^2 = R^2 + z_1^2 - 2Rz_1\cos\theta$$

$\underline{3}$ $$\Rightarrow q_1^2(R^2+z^2-2Rz\cos\theta) = q^2(R^2+z_1^2-2Rz_1\cos\theta)$$

$$\Rightarrow q_1^2(R^2+z^2) - 2Rq_1^2 z\cos\theta = q^2(R^2+z_1^2) - 2Rq^2 z_1\cos\theta$$

המשוואה הזו צריכה להיות נכונה לכל θ (כי $\varphi=0$ על כל הקף המעגל). לכן גם המקדמים של θ וגם האיברים החופשיים צריכים להשתוות.

$\underline{4}$ $$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} q_1^2(R^2+z^2) = q^2(R^2+z_1^2) \\ 2Rq_1^2 z = 2Rq^2 z_1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \frac{q_1^2}{q^2} = \frac{z_1}{z} \\ R^2+z_1^2 = \frac{q_1^2}{q^2}(R^2+z^2) = \frac{z_1}{z}(R^2+z^2) \end{array}$$

קיבלנו משוואה ריבועית עבור z_1:

$\underline{5}$ $$\Rightarrow z z_1^2 - (R_q^2+z^2)z_1 + R^2 z = 0$$

$$\Rightarrow z_{1_{1,2}} = \frac{(R_q^2+z^2) \pm \sqrt{(R^2+z^2)^2 - 4R^2z^2}}{2z} = \frac{(R^2+z^2) \pm (R^2-z^2)}{2z} = \begin{array}{c} \frac{R^2}{z} \\ z \end{array}$$

z הוא פתרון טריוויאלי שלא נותן מיקום מעניין. הפתרון הוא: $z_1 = \frac{R^2}{z}$.

מכאן מקבלים שמטען הדמות הוא:

$$\boxed{q_1 = -\sqrt{\frac{z_1}{z}}q = -\frac{R}{z}q \quad , \quad z_1 = \frac{R^2}{z}}$$

עכשיו שיש לנו את הערך והמקום של מטען הדמות, מוצאים את יתר המשתנים.

בשלב, כדי למצוא את התפלגות המטען המושרה:

1) מחשבים את הפוטנציאל φ.

2) מחשבים את רכיב השדה הניצב, על שפת המוליך:

$$E_\perp = -\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{\text{שפת המוליך}}$$

3) מוצאים את σ:

$$E_\perp = 4\pi\sigma$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{E_\perp}{4\pi} = -\frac{1}{4\pi}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{\text{שפת המוליך}}}$$

מציאת סה"כ המטען המושרה

אסור להניח שסה"כ המטען המושרה הוא אוטומטית מטען הדמות. צריך להוכיח.

בגדר אפשר להשתמש במשפט גאוס:

$\underline{1}$ $$\oiint \bar{E}\,d\bar{a} = 4\pi Q_s$$

$\underline{2}$ $$\bar{E} = \bar{E}_q + \bar{E}_{q_1}$$

$\underline{3}$ $$\oiint (\bar{E}_q + \bar{E}_{q_1})\,d\bar{a} = \overbrace{\oiint \bar{E}_q\,d\bar{a}}^{\substack{\text{שטף של q דרך} \\ \text{משטח חיצונית} \\ =0}} + \overbrace{\oiint \bar{E}_{q_1}\,d\bar{a}}^{=4\pi q_1} = 4\pi Q_s$$

$$\Rightarrow 4\pi q_1 = 4\pi Q_s \Rightarrow \boxed{Q_s = q_1}$$

$\boxed{VII}$ קיבול וקבלים

ראינו שקיים קשר בין מטען לפוטנציאל: $\nabla^2\varphi=-4\pi\rho$. קיים כאן קשר ליניארי פשוט בין המטען לבין הפוטנציאל. עבור גוף מוליך ניתן לדבר על "הפוטנציאל של המוליך" ועל המטען הכולל על המוליך.

1) קיבול של מוליך בודד

עם מטען כולל q שנמצא בפוטנציאל φ_0, כאשר $\varphi \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$:

$$\boxed{q=c\varphi_0}$$

הקבוע c נקרא הקיבול של המוליך והוא תלוי בתכונות הגאומטריות של המוליך.

ככל ש-c גדול יותר נדרש יותר מטען כדי להגיע לאותו פוטנציאל.

יחידות:

$\underline{MKS}: [c]=\frac{coul}{volt}\equiv Farad$

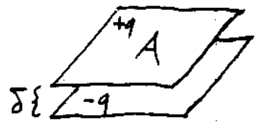
קיבול נמדד ביחידות של אורך:

$\underline{cgs}: [c]=\frac{esu}{statvolt}=\frac{esu}{esu/cm}=cm$

ופרד זה גודל מאד גדול:

$1\ Farad \simeq \frac{3\cdot10^{9}\ esu}{\frac{1}{300}\ statvolt}=9\cdot10^{11}\ cm$

2) זוג מוליכים - קבל לוחות



הפרש הפוטנציאלים בין המוליכים:

$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1\equiv V$

נגדיר את הקיבול ביחס הפרופורציה:

$$\boxed{q=c\Delta\varphi=cV}$$

לצורך הפשטות נניח $\delta\ll\sqrt{A}$ ואז הלוחות יתנהגו כמו לוחות אינסופיים (פרט לתיקון קצוות).

ממשוואת לפלס במימד אחד אנחנו יודעים שהשדה החשמלי הוא:

$E=\frac{\Delta\varphi}{\delta}$

אבל אנחנו גם יודעים שעבור מוליכים:

$\underline{E=E_+=4\pi\sigma=4\pi\frac{q}{A}}$

מכאן מקבלים את הקיבול של קבל-לוחות:

$$\boxed{C=\frac{A}{4\pi\delta}}$$

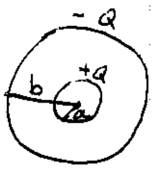
- חיבור קבלים

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{במקביל}: && C=C_1+C_2\\ &\text{בטור}: && \frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\end{aligned}}$$

- האנרגיה של קבל:

$$\boxed{U=\int_0^Q\frac{q}{C}dq=\frac{Q^2}{2C}=\frac{1}{2}CV^2}$$

- קבל כדורי



$\underline{1}\quad E=\frac{Q}{r^2}$

$\underline{2}\quad V=\Delta\varphi=\varphi_a-\varphi_b=\int_a^b\bar{E}\cdot d\bar{r}=\int_a^b\frac{Q}{r^2}dr=Q\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=Q\frac{b-a}{ab}$

$\underline{3}\quad\Rightarrow\ \boxed{C=\frac{Q}{V}=\frac{ab}{b-a}}$

II הזרם החשמלי

I זרם חשמלי מוגדר כתנועה של אלקטרונים. כיוון הזרם מוגדר, היסטורית, ככיוון התנועה של מטענים חיוביים במעגל, ולכן מנוגד לכיוון האמיתי.

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

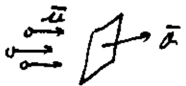
מהקשר הבסיסי שהזרם הוא השינוי בכמות המטען ניתן למצוא מטען כולל במעגל: $\boxed{q = \int I\,dt}$

בדרך-כלל עובדים עם ביטוי מקומי לזרם, הנקרא **צפיפות זרם** ומסומן באות $\bar J$.

ההגדרה של צפיפות הזרם יוצאת מביטוי כללי יותר לזרם: $\boxed{I_{\bar a} = \frac{Nq}{\Delta t} = nq\,\bar a\cdot\bar u}$

כאשר $\bar u$ הוא מהירות האלקטרונים, N מספרם, n צפיפותם ו-$\bar a$ מסגרת כלשהי דרכה הם עוברים.

$\bar J$ הוא בעצם הזרם ליחידת שטח: $\boxed{I_{\bar a} \equiv \bar a\cdot\bar J}$



מס' סוגים של חלקיקים: $\Rightarrow \boxed{\bar J = \sum_k n_k q_k \bar u_k}$

חלקיקים עם אותו מטען, מהירויות שונות: $\boxed{\bar J = qn\langle\bar u\rangle}$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int_s \bar J\cdot d\bar a}$$

II חוק שימור המטען

מצאנו שני קשרים: בין הזרם החשמלי לבין צפיפות הזרם: $I = \int_s \bar J\cdot d\bar a = \int_V (\bar\nabla\cdot\bar J)\,dV$

ובין הזרם החשמלי לבין המטען: $I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\,dV$

* {אמנם הגדרנו $I = \frac{dq}{dt}$, אך זהו ביטוי מקומי לנקודה בתוך המעגל. הביטוי $I = -\frac{dQ}{dt}$ מדבר על סה"כ המטען ואומר: זרם נוצר מ<u>יציאה</u> של מטענים מתוך מטען כולל. לכן המינוס}.

מתוך שני הקשרים למעלה נקבל ביטוי מקומי לשימור המטען: $\boxed{\bar\nabla\cdot\bar J = -\frac{\partial\rho}{\partial t}}$

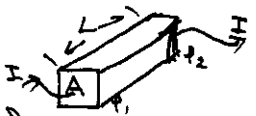
III מוליכות חשמלית וחוק אוהם

במצב שקיים קשר ליניארי בין צפיפות הזרם לבין השדה החשמלי: $\boxed{J_i = \sigma_{ij}E_j}$

כאשר σ_{ij} נקרא טנזור המוליכות הסגולית. באופן פרטי ניתן לרשום: $\boxed{\bar J = \sigma\bar E}$

σ - המוליכות הסגולית (conductivity) משתנה מחומר לחומר ותלוי במצב (טמפ', לחץ וכו').

נגד מקרוסקופי



בד"כ מסתכלים על נגדים בעלי מימדים מוגדרים. ניתן למצוא את התנגדותם מקשרים:

ממשוואת לפלס החד-מימדית: $E = \frac{\Delta\varphi}{L} \equiv \frac{V}{L}$

הגדרת צפיפות הזרם: $J = \frac{I}{A}$

חוק אוהם: $J = \sigma E$

$$\boxed{R \equiv \frac{L}{\sigma A} \equiv \rho\frac{L}{A}} \qquad \boxed{V = RI}$$

R נקרא ההתנגדות (resistance) ויחידותיו: $[R] = \frac{s}{cm} = \frac{volt}{amp} \equiv ohm \equiv \Omega$

ρ נקרא התנגדות סגולית (resistivity) ויחידותיו: $[\sigma] = \frac{1}{s} \Rightarrow [\rho] = s$

ההתנגדות הסגולית <u>גדלה</u> עם הטמפרטורה.

- איבוד אנרגיה במהלך זרימה

בתנועה מפוטנציאל גבוה φ_2 לפוטנציאל נמוך φ_1 יאבד כל חלקיק עם מטען q אנרגיה בגודל: $q\Delta\varphi = q(\varphi_2-\varphi_1)$. אם מטען q נע כברת דרך $d\bar{s}$ בהשפעת שדה חשמלי $\bar{E}$, אז האנרגיה שהוא יאבד שווה לעבודה שמבצע עליו הכח החשמלי:

$$dW = \bar{F}\cdot d\bar{s} = q\bar{E}\cdot d\bar{s}$$

העבודה ליח' זמן (הספק) תהיה:

$$P = \frac{dW}{dt} = q\bar{E}\cdot\frac{d\bar{s}}{dt} = q\bar{E}\cdot\bar{u}$$

אם נעבור למהירות ממוצעת וצפיפות חלקיקים נקבל ביטוי עבור ההספק ליח' נפח:

$$P_V = n\bar{F}\langle\bar{u}\rangle = nq\bar{E}\cdot\langle\bar{u}\rangle = \bar{E}\cdot\bar{J} \Rightarrow \boxed{P=\int_V \bar{E}\cdot\bar{J}\,dV}$$

כאשר חוק אוהם ($\bar{J}=\sigma\bar{E}$) מתקיים נקבל ביטויים פרטיים:

$$\boxed{P=\int_V \sigma E^2\,dV=\int_V \rho J^2\,dV}$$

ועבור הגוף המקרוסקופי:

$$P=\int_V JE\,dV = \left(\frac{I}{A}\right)\left(\frac{V}{L}\right)(A\cdot L) = VI \Rightarrow \boxed{P=VI}$$

ואם מתקיים חוק אוהם ($V=IR$):

$$\boxed{P=I^2R=\frac{V^2}{R}}$$

והיחידות של ההספק הן:

$$[P]=\frac{erg}{s} = volt\cdot amp \equiv Watt \equiv W$$

- פרדוקס מהירות האלקטרונים ומודל דרודה

מצאנו שניתן להגדיר צפיפות זרם בעזרת מהירות ממוצעת: $\bar{J}_e=-en_e\langle\bar{u}_e\rangle$ ולכן, לפי חוק אוהם נקבל שבשדה חשמלי קבוע מהירות האלקטרונים קבועה:

$$\langle\bar{u}_e\rangle = -\frac{\bar{J}_e}{en_e} = -\frac{\sigma}{en_e}\bar{E}$$

מצד שני, בשדה חשמלי מופעל כח על האלקטרונים שמאיץ אותם:

$$\bar{a}_e = \frac{\bar{F}}{m_e} = -\frac{e}{m_e}\bar{E}$$

ולכן, לפי חוק אוהם, נקבל שמהירות האלקטרונים עולה:

$$\langle\bar{u}_e\rangle = \bar{a}_e\cdot t = -\frac{e}{m_e}\bar{E}\cdot t$$

כדי ליישב את הסתירה טען דרודה שהאלקטרונים אכן מאיצים, אבל מתנגשים באטומים ומאבדים אנרגיה קינטית. לכן, למרות שמהירותם משתנה, המהירות הממוצעת קבועה.

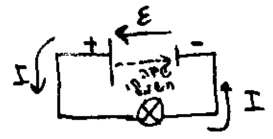
לכן, אם נסתכל על זמן ממוצע $\langle t\rangle=\tau$ נקבל שחוק אוהם כן מתקיים:

$$\bar{J}_e = -en_e\langle u_e\rangle = -en_e\bar{a}_e\cdot\langle t\rangle = \frac{e^2n_e\tau}{m_e}\bar{E}$$

לפי קשר זה מגדירים את מוליכות דרודה:

$$\boxed{\sigma = \frac{e^2n_e\tau}{m_e}}$$

הבעיה היא שכשבדקו את זמני המהלך החופשי של האלקטרונים בחומר, מצאו שהמרחקים שהם מייצגים גדולים בהרבה מהמרחק בין האטומים בחומר. לכן מודל דרודה אינו מדויק, והתיאור המדויק נזקק להבנות על קוונטים.

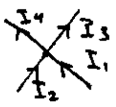


IV כא"מ - כח אלקטרומניע - $\mathcal{E}$

כדי להחזיק זרם צריך להוסיף אנרגיה למטענים החשמליים. מקור הכא"מ עושה עבודה על החלקיקים - הוא מניע אותם מפוטנציאל נמוך ⊖ לפוטנציאל גבוה ⊕ וממשיך את הזרם במעגל. זהו גם אומר שהוא מניע אותם בניגוד לקווי השדה החשמלי בין צדיו. לכא"מ בכ"ז יש התנגדות פנימית r.
כא"מ, כמקור מתח, מחושב ביחידות של וולט V (MKS) או סטטוולט (cgs).

V חוקי קירכהוף

1) **חוק הצומת**: כאשר נבחר סימן ⊕ לזרם הנכנס לצומת:

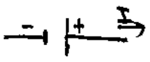


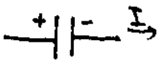
$$\boxed{\sum I_i = 0}$$ חוק בצומת

2) **חוק הלולאה**: הפרש הפוטנציאלים על לולאה סגורה הוא אפס:

$$\boxed{\sum V_i = 0}$$ לולאה סגורה

3) הפרש הפוטנציאלים עם כיוון הזרם:  : $V=-IR$

" " " " :  : $V=IR$

" " " " :  : $V=-\frac{Q}{C}$

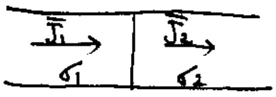
- חיבור התנגדויות

בטור:	$R = R_1 + R_2$
במקביל:	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

* זרימה דרך שני חומרים שונים

נסתכל על מצב של זרימה עמידה (כמות המטען הכולל לא משתנה): $\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

נסתכל על זרימה חד-מימדית $\bar{J}=J(x)\hat{x}$ דרך שני חומרים שונים:



$$\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = \frac{dJ}{dx} = 0 \Rightarrow \bar{J} = const \Rightarrow \bar{J}_1 = \bar{J}_2$$

הזרם יהיה קבוע ואחיד דרך שני החומרים, ולכן צריך להיות הבדל בשדות החשמליים:

$$\sigma_1 E_1 = J_1 = J_2 = \sigma_2 E_2 \Rightarrow \boxed{E_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} E_1}$$

כיוון שיש קפיצה בשדה, על פי ההפרדה תיווצר צפיפות משטחית: $\boxed{4\pi\sigma = \Delta E = \frac{1}{\sigma_2}(\sigma_1-\sigma_2)E_1}$

ואם $\sigma(\bar{r})$ משתנה באופן רציף נקבל צפיפות נפחית.

VI - הפרדת מוליך/מבודד

מבודד: בטמפ' אפס כל המטענים החשמליים קשורים, לכן צפיפות המטען החופשי היא אפס ולכן ההתנגדות אינסופית (מוליכות אפס). ככל שמחממים מבודד משחררים אלקטרונים.

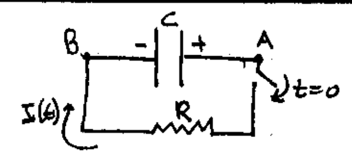
לכן: ככל שמחממים מבודד, התנגדותו קטנה.

מוליך: בטמפ' אפס החומר מאוד מסודר ויש התנגדות סופית כלשהי. ככל שמחממים את החומר הוא פחות מסודר ויש יותר מקום להתנגשויות.

לכן: ככל שמחממים מוליך, התנגדותו גדלה.

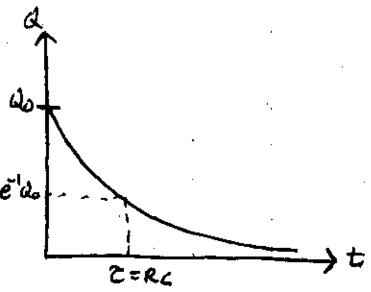
VII מעגלי RC עם תלות בזמן

1) פריקה של קבל



בזמן t=0 סוגרים את המפסק והקבל מתחיל להתפרק.

$$\left.\begin{aligned} V_c &= \varphi_A-\varphi_B=\frac{Q}{C}\\ V_R &= \varphi_A-\varphi_B=IR \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} IR &= \frac{Q}{C}\\ I &= -\frac{dQ}{dt}\end{aligned}\right\} \quad \frac{Q}{C}=-R\frac{dQ}{dt} \Rightarrow \boxed{Q(t)=Q_0e^{-t/RC}}$$



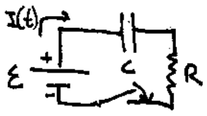
קיבלנו התפרקות עם דעיכה אקספוננציאלית שמאופיינת ע"י קבוע הדעיכה $\boxed{\tau=RC}$. לאחר זמן τ: $Q(RC)=e^{-1}Q_0\approx 0.37Q_0$

הזרם במעגל יתקבל מהמטען: $\boxed{I=-\frac{dQ}{dt}=\frac{Q_0}{RC}e^{-t/RC}}$

האנרגיה בקבל היא: $U_C(t)=\frac{1}{2}\frac{Q(t)^2}{C}$ ומכאן נוכל לחשב את איבוד האנרגיה ליח' זמן:

$$-\frac{dU_c}{dt}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{Q(t)^2}{C}\right)=-\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt}=\frac{Q}{C}I=I^2R$$

וזה בדיוק ההספק שהולך לאיבוד בנגד ⇐ כל האנרגיה שנפרקה מהקבל הלכה לחימום הנגד (בהנחה שבמעגל קיים זרם אוהמי והאנרגיה לא הולכת לקרינה אלקטרומגנטית).



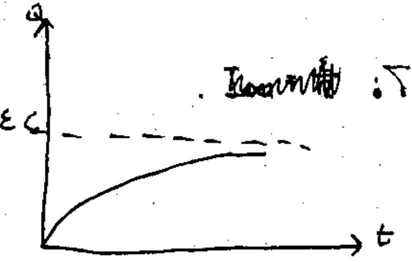
2) טעינה של קבל

בזמן t=0 סוגרים את המפסק והקבל מתחיל להיטען.

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon-\frac{Q}{C}-IR=0\\ &I=\frac{dQ}{dt} \end{aligned}\right\} \quad \dot{Q}+\frac{Q}{RC}=\frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow \boxed{Q(t)=\varepsilon C\left(1-e^{-t/RC}\right)}$$

הזרם שעליה במטען:

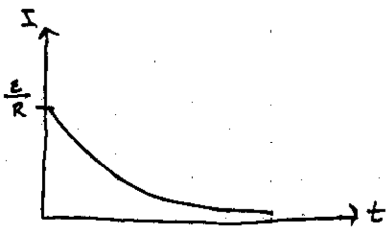
ולכן הזרם במעגל: $\boxed{I(t)=\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}}$



נשים לב ש- $\frac{\varepsilon}{R}$ הוא בעצם הזרם שהיינו מקבלים אם לא היה קבל.

ההספק שנותן מקור הכא"מ: $P_\varepsilon(t)=\varepsilon I(t)=\frac{\varepsilon^2}{R}e^{-t/RC}$

ההספק שמתבזבז בנגד: $P_R(t)=I^2R=\frac{\varepsilon^2}{R}e^{-2t/RC}$



תוספת האנרגיה בקבל ליח' זמן:

$$\frac{dU}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)=\frac{Q}{C}\dot{Q}=\frac{Q}{C}I=\varepsilon\left(1-e^{-t/RC}\right)\frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}=$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{R}\left(\underbrace{e^{-t/RC}}_{\text{האנרגיה שמספק מקור הכא"מ}}-\underbrace{e^{-2t/RC}}_{\text{האנרגיה שמתבזבזת בנגד}}\right)$$

VIII חומרים דיאלקטריים

חומרים דיאלקטרים הם מבודדים אשר בשדה חשמלי יכולים לקרות להם שני דברים:

א) ייווצרו דיפולים חשמליים בתוך החומר:

אם נסתכל על מודל פשטני של האטום, אז בשדה חשמלי השדה ינסה להפריד בין הגרעין לבין ענן האלקטרונים שסובב אותו.

הגרעין ירגיש, בנוסף לשדה החיצוני, את השדה שמפעיל עליו ענן האלקטרונים.

תנועת הגרעין תיעצר כאשר הכוחות שמפעילים שני השדות יתאזנו.

לכן, כאשר ze הוא מטען הגרעין, נקבל דיפול: $p = zeb = R^3 E$

ואנו רואים שיש קשר ליניארי בין p לבין $\bar E$:

$$\boxed{\bar p = \alpha \bar E}$$

כאשר α הוא יכולת הקיטוב של האטום (polarizability).

נוכל להגדיר צפיפות קיטוב, כאשר n הוא מס' האטומים ליח' נפח:

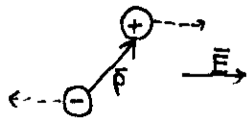
$$\boxed{\bar P = n\bar p = n\alpha \bar E \equiv \chi_e \bar E}$$

χ_e נקרא הסספטיביליות החשמלית.

באופן כללי, χ_e, כמו σ, הוא טנזור:

$$\boxed{P_i = \chi_{e_{ij}} E_j}$$

ב) הכוונה של דיפולים חשמליים קיימים

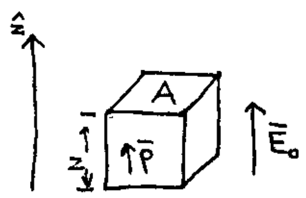


ניתן להראות שבטמפ' נתונה T קיים גם במקרה זה יחס ליניארי בין השדה לבין צפיפות הקיטוב:

$$\boxed{\bar P = \frac{np^2}{k_B T}\bar E = \chi_e \bar E}$$

⇐ ככל שמעלים את טמפ' החומר קשה יותר לקטב אותו.

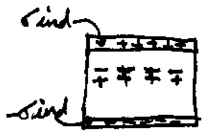
השדה האלקטרי בתוך החומר



נסתכל על קוביה עם צפיפות קיטוב אחידה. הדיפול הכולל יהיה: $\bar P_\square = \bar P \cdot Az = (PA)\bar z \equiv Q\bar z$

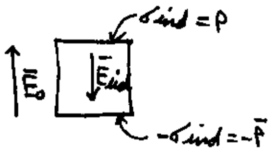
אפשר לחשוב על הדיפול הכולל כסכום דיפולים, או בעצם בתור המטען הכולל כפול $\bar z$ (הגדרת הדיפול).

ניתן לקבל את אותו הדיפול אם נגדיר צפיפות מטען משטחית $\sigma_{ind} = +P$ על המשטח העליון ו- $-\sigma_{ind} = -P$ על המשטח התחתון. בפועל: המטען אכן מושרה על המשטחים.



לכן נקבל בתוך הקוביה שדה מושרה $\bar E_{ind}$ שהפוך לשדה החיצוני.

נקבל החלשה של השדה החשמלי:



$$\bar E_{ind} = -4\pi\sigma_{ind} = -4\pi\bar P$$

$$\Rightarrow \bar E = \bar E_0 - \bar E_{ind} = \bar E_0 - 4\pi\bar P$$

בחומרים דיאלקטריים ליניאריים נקבל:

$$\bar E = \bar E_0 - 4\pi\chi_e \bar E$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar E = \frac{\bar E_0}{1+4\pi\chi_e} \equiv \frac{\bar E_0}{\epsilon}}$$

ϵ נקרא המקדם הדיאלקטרי של החומר.

בוואקום (קלאסי) $\epsilon=1$, בכל חומר אחר $\epsilon>1$.

קבל עם חומר דיאלקטרי

נטען קבל במטען חופשי Q_f שיוצר שדה חשמלי E_f.

נכניס חומר דיאלקטרי שיוצר שדה הפוך E_{ind}. השדה החשמלי הכולל קטן פי ϵ: $\bar{E} = \frac{1}{\epsilon}\bar{E}_f$

ולכן גם הפרש הפוטנציאלים קטן בפקטור ϵ: $V \longrightarrow \frac{V}{\epsilon}$. ולכן הקיבול גדל: $\boxed{C = \frac{Q_f}{V} = \epsilon C_{vac}}$

חוק גאוס וחומרים דיאלקטריים

נהוג לחלק את המטען הכולל ρ למטען חופשי ρ_f ומטען קשור ρ_b: $\rho = \rho_f + \rho_b$

נגדיר את $\bar{E}$ בתור השדה הכולל ואת $\bar{D}$ בתור השדה שיוצרים המטענים החפשיים.

$$\boxed{\bar{D} \equiv \bar{E}_0 = \epsilon\bar{E} = \bar{E} + 4\pi\bar{P}}$$

חוק גאוס עבור השדה הכולל ייראה עכשיו: $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 4\pi\rho = 4\pi(\rho_f + \rho_b)$

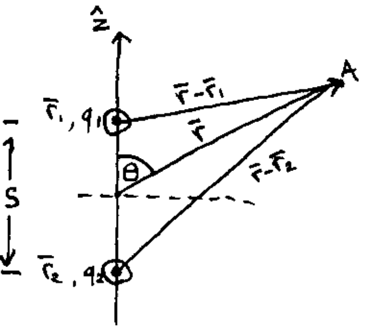
אם הקיטוב $\bar{P}$ קבוע בכל החומר נקבל קשר פשוט בין $\bar{D}$ לבין המטען החפשי: $\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = 4\pi\rho_f}$

שדומה מאד לקשר הכללי יותר $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 4\pi\rho$. את הקשר למעלה קיבלנו מהגד' $\bar{D} = \bar{E}_0$.

אם $\bar{P}$ אינו קבוע לא נוכל לוותר על צפיפות מטען קשור: $\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \bar{\nabla}\cdot\bar{E} + 4\pi\bar{\nabla}\cdot\bar{P}$

$$\Rightarrow \quad 4\pi\rho_f = 4\pi(\rho_f + \rho_b) + 4\pi\bar{\nabla}\cdot\bar{P} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{P} = -\rho_b}$$

IX הדיפול החשמלי



הפוטנציאל בנקודה A הוא:

$$\underline{1} \quad \varphi(\bar{r}) = \frac{q_1}{|\bar{r}-\bar{r}_1|} + \frac{q_2}{|\bar{r}-\bar{r}_2|}$$

$\underline{2}$ נחשב את אורכי הוקטורים בעזרת משפט הקוסינוסים:

$$|\bar{r}-\bar{r}_1|^2 = r^2 + r_1^2 - 2\bar{r}\cdot\bar{r}_1 = r^2 + \frac{1}{4}s^2 - 2r\frac{s}{2}\cos\theta$$

$$|\bar{r}-\bar{r}_2|^2 = r^2 + \frac{1}{4}s^2 - 2r\frac{s}{2}\cos(\pi-\theta) = r^2 + \frac{1}{4}s^2 + rs\cos\theta$$

$\underline{3}$ עבור מרחקים גדולים מאוד ($r \gg s$) נוכל להשתמש בקירובים:

$$\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}_1|} = \frac{1}{r(1+\frac{1}{4}\frac{s^2}{r^2} - \frac{s}{r}\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \simeq \frac{1}{r(1-\frac{s}{r}\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \simeq \frac{1}{r}\left(1+\frac{s}{2r}\cos\theta\right)$$

$$\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}_2|} \simeq \frac{1}{r}\left(1-\frac{s}{2r}\cos\theta\right)$$

$$\underline{4} \Rightarrow \boxed{\varphi(\bar{r}) \simeq \frac{q_1}{r}\left(1+\frac{s}{2r}\cos\theta\right) + \frac{q_2}{r}\left(1-\frac{s}{2r}\cos\theta\right) = \frac{q_1+q_2}{r} + \frac{(q_1-q_2)s\cos\theta}{2r^2}}$$

נשים לב שהאיבר השמאלי הרבה יותר גדול מהאיבר הימני ($\frac{1}{r^2} < \frac{1}{r}$), ואם $s \ll r$ אז האיבר הימני הוא תיקון זניח. כלומר, אם מתרחקים מאוד מצבר המטענים כבר אי-אפשר להפריד ביניהם.

אבל אם מסתכלים על זוג מטענים שקולים $q_1=-q_2$ (כמו, למשל, גרעין אטום ואת האלקטרונים שלו), אז האיבר השמאלי מתאפס והתיקון אינו זניח.

במקרה ש- $q_1=-q_2$ נקבל, אם כן, את הפוטנציאל:

$$\varphi(\bar r) = \frac{q s \cos\theta}{r^2}$$

במקרה הזה מגדירים את <u>וקטור הדיפול החשמלי</u>:

$$\boxed{\bar p = q s \hat z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(\bar r) = \frac{\bar p}{r^2}\hat r = \frac{\bar p\cdot\bar r}{r^3}}$$

<u>השדה החשמלי של דיפול</u>

מתוך הקשר: $\varphi(\bar r) = \frac{p\cos\theta}{r^2}$:

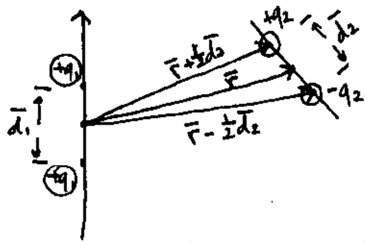
$$\boxed{\bar E = -\nabla\varphi(\bar r) = \frac{2p\cos\theta}{r^3}\hat r + \frac{p\sin\theta}{r^3}\hat\theta}$$

מתוך הקשר: $\varphi(\bar r) = \frac{\bar p\cdot\bar r}{r^3}$:

$$\boxed{\bar E = -\nabla\varphi(\bar r) = \frac{3(\bar p\cdot\bar r)\hat r}{r^4} - \frac{\bar p}{r^3} = \frac{3(\bar p\cdot\bar r)\hat r - \bar p}{r^3}}$$

<u>האנרגיה ההדדית של דיפולים</u>

האנרגיה ההדדית של שני דיפולים היא האנרגיה של הצבת דיפול אחד (בעצם של המטענים שמרכיבים אותו) בשדה של הדיפול השני. עבור זוג דיפולים, אשר אחד מהם נמצא בראשית, ניתן למצוא:



$$U(\bar r,\bar p_2) = q_2\varphi_1\left(\bar r+\tfrac{1}{2}\bar d_2\right) - q_2\varphi_1\left(\bar r-\tfrac{1}{2}\bar d_2\right) =$$

$$= q_2\bar p_1\frac{(\bar r+\frac{1}{2}\bar d_2)}{|\bar r+\frac{1}{2}\bar d_2|^3} - q_2\bar p_1\frac{(\bar r-\frac{1}{2}\bar d_2)}{|\bar r-\frac{1}{2}\bar d_2|^3}$$

באופן דומה לאופן בו חישבנו את <u>פוטנציאל הדיפול, ובעזרת אותה שיטת קירובים,</u> ניתן למצוא ש:

$$\boxed{U(\bar p_1,\bar p_2,\bar r) = \frac{\bar p_1\cdot\bar p_2}{r^3} - 3\frac{(\bar p_1\cdot\bar r)(\bar p_2\cdot\bar r)}{r^5}}$$

*) כיוון וקטור הדיפול $\bar s$ או $\bar d$, כיוון המרחק בין שני המטענים נלקח, במקרה ש- $q_1=-q_2$, בכיוון מהמטען השלילי למטען החיובי.

III מגנטוסטטיקה

I - שדות מגנטיים נוצרים כתוצאה מתנועה של מטענים, כלומר מזרם חשמלי.

הכח המגנטי הוא לא כח וקטורי באופן הרגיל. הכיוון שלו מאונך למישור בו נמצאים השדה $\bar{B}$ והמהירות $\bar{v}$, הוא מתקבל ממכפלת x:

$$\bar{F} = q\bar{v}\times\bar{B}$$

באופן כללי, כאשר קיימים גם שדה מגנטי $\bar{B}$ וגם שדה חשמלי $\bar{E}$: **כח לורנץ**:

$$\boxed{\bar{F}=q\left(\bar{E}+\frac{1}{c}\bar{v}\times\bar{B}\right)}$$

הפקטור של $\frac{1}{c}$ מגיע מכך שאנו עובדים ב-cgs. ב-MKS הוא נעלם (כלומר שווה לאחד).

במגנטוסטטיקה קיימים מספר חוקים שמקבילים לחוקים של אלקטרוסטטיקה:

- חוק אמפר

כמו שחוק גאוס קשר בין השדה החשמלי למטען: $\oint \bar{E} d\bar{s} = 4\pi Q_{enc}$, כך חוק אמפר קושר בין השדה המגנטי לבין הזרם הכלוא בלולאה האמפרית:

$$\boxed{\oint \bar{B} d\bar{s} = \frac{4\pi}{c} I_{enc}}$$

ואפשר לעבוד איתו בדיוק כמו שעובדים עם חוק גאוס - בונים לולאה באזור שאנחנו רוצים לבדוק, כך שתהיה סימטריה פשוטה שתפשט את האינטגרל $\oint \bar{B} d\bar{s}$ (כלומר משהו שהשדה יהיה בכור ממנו), ומשווים לכמות הזרם שעובר דרך אותה לולאה.

בעזרת חוק סטוקס והקשר בין הזרם I לבין צפיפות הזרם $\bar{J}$ אפשר למצוא ביטוי דיפרנציאלי לחוק אמפר:

$$\left.\begin{aligned}\oint \bar{B} d\bar{s} &= \int_s (\bar{\nabla}\times\bar{B}) d\bar{a}\\ \frac{4\pi}{c} I_{enc} &= \int_s \bar{J}\cdot d\bar{a}\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\bar{\nabla}\times\bar{B} = \frac{4\pi}{c}\bar{J}}$$

וזה מקביל באלקטרוסטטיקה ל: $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 4\pi\rho$.

- אין מטענים מגנטיים

באלקטרוסטטיקה ראינו שכדי להגדיר את השדה החשמלי $\bar{E}$ צריך שתי משוואות: $\bar{\nabla}\cdot\bar{E}=4\pi\rho$ ו- $\bar{\nabla}\times\bar{E}=0$. כנ"ל עבור השדה המגנטי $\bar{B}$. אמפר נתן משוואה אחת: $\bar{\nabla}\times\bar{B}=\frac{4\pi}{c}\bar{J}$.

המשוואה השניה תהיה דיברגנס, וממנה מתקבל שאין מטענים מגנטיים:

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0}$$

לקווי שדה מגנטי אין התחלה ואין סוף - הם בד"כ מתעגלים לתוך עצמם.

דרך אחרת לכתוב את חוק הדיברגנס הוא בצורה אינטגרלית:

$$\boxed{\oiint \bar{B}\cdot d\bar{a} = 0}$$

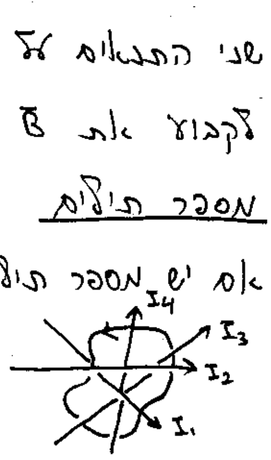
- משפט יחידות

שני התנאים על $\bar{B}$: $\bar{\nabla}\times\bar{B}=\frac{4\pi}{c}\bar{J}$, $\bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0$ מספיקים, בהינתן תנאי שפה, לקבוע את $\bar{B}$ באופן יחודי.

- מספר תילים

אם יש מספר תילים שעוברים דרך לולאת אמפר, נעשה סופרפוזיציה:

$$\boxed{\oint \bar{B}\cdot d\bar{s} = \frac{4\pi}{c}\sum_i I_i}$$



II הפוטנציאל הוקטורי $\bar{A}$

- בהינתן $\bar{J}$ קצת קשה למצוא את $\bar{B}$ בעזרת המשוואה $\bar{\nabla}\times\bar{B}=\frac{4\pi}{c}\bar{J}$.

לכן, כיוון שאנחנו גם יודעים ש- $\bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0$, אפשר להגדיר יצור חדש, $\bar{A}$, שיקיים: $\boxed{\bar{B}=\bar{\nabla}\times\bar{A}}$, וזאת מתוך הזהות המתמטית: $\bar{\nabla}\cdot\bar{B}\equiv\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{A})=0$

$\bar{A}$, הפוטנציאל הוקטורי, מקיים תפקיד דומה לזה של φ, הפוטנציאל הסקלרי.

- כמו שבעזרת φ יכולנו למצוא את $\bar{E}$ בצורה יחסית פשוטה (יותר קל לפתור $\bar{E}=\bar{\nabla}\varphi$ מאשר לעשות אינטגרלים על המטען ρ כך נעשה גם עם $\bar{A}$.

- כמו שקבענו כרצוננו את φ, כך גם עם $\bar{A}$. נמצא קשר בין $\bar{A}$ לבין $\bar{J}$:

$$\bar{\nabla}\times\bar{B}=\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A})=\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\cdot\bar{A})-\nabla^2\bar{A}=\frac{4\pi}{c}\bar{J}$$

כיוון שאפשר לקבוע את $\bar{A}$ בחופשיות, נקבע אותו כך ש: $\bar{\nabla}\cdot\bar{A}=0$.

קיבלנו משוואה שנראית כמו משוואת לפלס: $\nabla^2\varphi=-4\pi\rho$: $\Rightarrow\boxed{\nabla^2\bar{A}=-\frac{4\pi}{c}\bar{J}}$

את משוואת לפלאס כבר פתרנו באופן כללי, אז רק נמיר אותה כדי שהיא תיראה כמו $\nabla^2\bar{A}=-\frac{4\pi}{c}\bar{J}$:

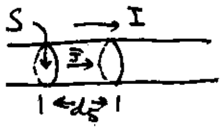
$$\nabla^2\varphi=-4\pi\rho\ \Rightarrow\ \varphi(\bar{r})=\int\frac{\rho(\bar{r}')\,d^3\bar{r}'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$$

אינטגרל <u>נפחי</u>:

$$\nabla^2\bar{A}=-(4\pi/c)\bar{J}\ \Rightarrow\ \boxed{\bar{A}(\bar{r})=\frac{1}{c}\int\frac{\bar{J}(\bar{r}')\,d^3r'}{|\bar{r}-\bar{r}'|}}$$

זה אינטגרל נפחי, על d^3r, מה שאומר שצריך בעצם לעשות שלושה אינטגרלים כדי לקבל את שלושת רכיבי $\bar{A}(\bar{r})=\bar{A}(x,y,z)$.

באופן פרטי אפשר להסתכל על האינטגרל עבור זרם בתיל:



במקרה הזה אלמנט הנפח dV (או d^3r) יהיה: $dV=S\,ds$

$$\Rightarrow\bar{J}\,dV=\overbrace{\bar{J}S}^{I}\,d\bar{s}=I\,d\bar{s}$$

<u>זרם בתיל</u>:

$$\Rightarrow\boxed{\bar{A}(\bar{r})=\frac{1}{c}\int\frac{I\,d\bar{s}(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}}$$

III <u>חוק ביו-סבר</u>

חוק ביו-סבר נותן את הקשר הישיר בין $\bar{B}$ לבין $\bar{J}$:

$$\boxed{\bar{B}(\bar{r})=\frac{1}{c}\int\frac{\bar{J}(\bar{r}')\times(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}d\bar{r}'}$$

ובאופן פרטי, עבור זרם בתיל:

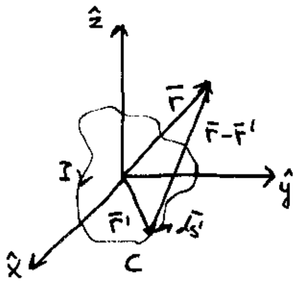
$$\boxed{\bar{B}(\bar{r})=\frac{1}{c}\int\frac{I\,d\bar{l}'\times(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|^3}}$$

קל לראות שהאינטגרל הזה לא פשוט (דורש שלושה אינטגרלים נפרדים, לכל רכיב) ולכן לפעמים יהיה פשוט יותר למצוא את $\bar{A}$ וממנו את $\bar{B}$, כאשר $\bar{B}=\bar{\nabla}\times\bar{A}$.

<u>הקשר בין $\bar{A}$ ל-$\bar{B}$</u>:

$$\boxed{\bar{A}(\bar{r})=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\bar{B}(\bar{r}')\times(\bar{r}-\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|}d\bar{r}'}$$

IV הדיפול המגנטי



לולאה כלשהי, המתוארת ע"י c במישור x-y, נושאת זרם I.

השטח המוגבל ע"י c מוגדר ב- $\bar a$.

$d\bar s'$ מציין צעד קטן מהנקודה $\bar r'$:

1 $$\bar A(\bar r)=\frac{I}{c}\oint_c\frac{d\bar s'}{|\bar r-\bar r'|}$$

נבצע את אותו הקירוב שביצענו בדיפול החשמלי, כאשר $r'\ll r$:

2 $$\frac{1}{|\bar r-\bar r'|}=\frac{1}{r\left(1+\frac{r'^2}{r^2}-2\bar r'\cdot\hat r/r\right)^{\frac12}}\simeq\frac{1}{r\left(1-2\frac{\bar r\cdot\bar r'}{r^2}\right)^{\frac12}}\simeq\frac{1}{r}\left(1+\frac{\bar r\cdot\bar r'}{r^2}\right)$$

3 $$\Rightarrow\ \bar A(\bar r)\simeq\frac{I}{cr}\oint_c d\bar s'+\frac{I}{cr^3}\oint_c(\bar r\cdot\bar r')d\bar s'$$

נשתמש בזהות מתמטית עבור פונקציה סקלרית $f(\bar r)$:

4 $$\int_s\bar\nabla f\times d\bar a=-\oint_c f\,d\bar s$$

$$f(\bar r)=1\ :\ \oint_c d\bar s=0\ \Rightarrow\ \frac{I}{cr}\oint_c d\bar s'=0$$

$$f(\bar r)=\overline{const}\cdot\bar r\ :\ \bar\nabla f=\overline{const}$$

$$\Rightarrow\ \int_s\bar\nabla f\times d\bar a=\overline{const}\times\int_s d\bar a=\overline{const}\times\bar a$$

$$\Rightarrow\ \oint_c(\overline{const}\cdot\bar r)d\bar s=\bar a\times\overline{const}$$

$$\Rightarrow\ \oint_c(\bar r\cdot\bar r')d\bar s'=\bar a\times\bar r$$

באופן דומה לחישוב שעשו עבור הדיפול החשמלי, קיבלנו ביטוי לפוטנציאל הוקטורי של דיפול מגנטי:

5 $$\Rightarrow\ \boxed{\bar A(\bar r)=\frac{I}{c}\,\frac{\bar a\times\bar r}{r^3}\equiv\frac{\bar m\times\hat r}{r^2}}$$

<u>מומנט הדיפול המגנטי</u>:

$$\boxed{\bar m=\frac{I}{c}\bar a}$$

מומנט כח על דיפול בשדה מגנטי קבוע:

6 $$\boxed{\bar N=\bar m\times\bar B}$$

השדה המגנטי שיוצר דיפול מגנטי:

7 $$\boxed{\bar B_m=\frac{1}{r^3}\left[3(\bar m\cdot\hat r)\hat r-\bar m\right]}$$

הכח על דיפול בשדה חיצוני <u>לא קבוע</u>:

8 $$\boxed{\bar F=(\bar m\cdot\bar\nabla)\cdot\bar B}$$

כח מגנטי על אלמנט זרם:

9 $$\boxed{d\bar F=\frac{I}{c}d\bar l\times\bar B}$$

אנרגיה פוטנציאלית של דיפול:

10 $$\boxed{U=-\bar m\cdot\bar B}$$

V מכשירים חשובים

1) מאיץ הציקלוטרון -

הזמן שלוקח לחלקיק להשלים סיבוב תחת השפעת כח לורנץ:

$$T=\frac{2\pi r}{v}$$

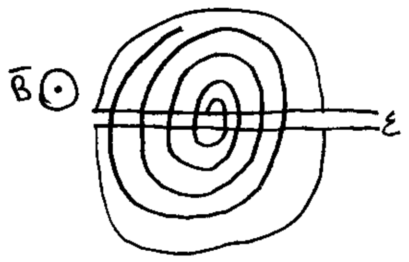
$$\bar F=\frac{q}{c}\bar v\times\bar B\ \Rightarrow\ ma=\frac{mv^2}{r}=\frac{q}{c}vB\ \Rightarrow\ v=\frac{qrB}{mc}$$

זמן המחזור לא תלוי ברדיוס/מהירות החלקיק:

$$\Rightarrow\ T=\frac{2\pi r}{v}=2\pi r\frac{cm}{qrB}=2\pi\frac{cm}{qB}$$

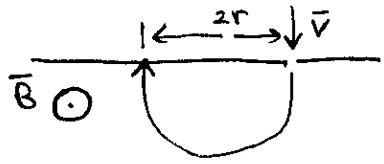
נגדיר את תדירות הציקלוטרון ($\omega_c=\frac{2\pi}{T}$):

$$\Rightarrow\ \boxed{\omega_c=\frac{qB}{mc}}$$



כשהחלקיק יעבור דרך השדה החשמלי שיוצר הגל ε הוא יואץ, והרדיוס של תנועתו יגדל. כדי שהוא לא יאבד את האנרגיה שהוא צובר במעבר דרך השדה החשמלי דואגים שהמקור יהיה של מתח חילופין (השדה משנה קיטוב). תדירות החילופין $=\omega_c$.

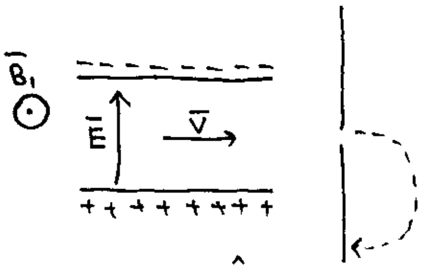
2) ספקטרומטר מסות



מתוך הביטוי הקודם בודדים את m ונקבל: $\boxed{m = \frac{qB}{Vc} r}$

אם q ידוע ובוחרים מראש את V, אפשר מ-r לחשב את m.

כדי לבחור את מהירות הכניסה משתמשים גם בשדה מגנטי וגם בשדה חשמלי:

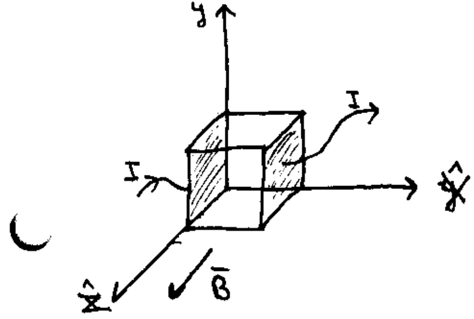


רק מטענים שינועו ישר יעברו דרך החריץ. לכן דרוש שיקול כוחות: $qE = \frac{q}{c} VB_1$

הכח המגנטי תלוי במהירות, וכך בוררים את המהירות:

$V = c\frac{E}{B_1}$

VI אפקט הול



נסתכל על בלוק מוליך נייח בעל צלעות בגודל l.

נפעיל שדה מגנטי $\bar{B} = B_z\hat{z}$.

נחבר מימין ומשמאל סוללה ונקבל זרם: $\bar{J} = J_x\hat{x} = nqV_x\hat{x}$

כשחלקיקים טעונים נעים בכיוון $\hat{x}$ ומופעל עליהם שדה מגנטי בכיוון $\hat{z}$ יפעל עליהם כח מגנטי:

$$\bar{F} = m\frac{q}{c}\bar{V}\times\bar{B} = \frac{q}{c}V_xB_z(\hat{x}\times\hat{z}) = -\frac{q}{c}V_xB_z\hat{y} \equiv -F_y\hat{y}$$

החלקיקים ינועו מטה וייווצר שדה חשמלי בכיוון ההפוך שילך ויגדל עד שהכח שהוא מפעיל ישתווה לכח המגנטי F_y. במצב עמיד $qE_y = F_y$ נקבל: $E_y = \frac{1}{c}V_xB_z = \frac{B_z}{cnq}J_x$

תוצאות האפקט

1) קשר ליניארי בין שדה לבין צפיפות זרם (כמו בחוק אוהם): $\boxed{E_y = \frac{B_z}{cnq}J_x}$

רואים פה שלושה כיוונים וקטורים ⇐ מסתתר פה טנזור: $E_i = \rho_{ij}J_j$

וכך ניתן להגדיר את ההתנגדות הסגולית של הול: $\Rightarrow \boxed{\rho_{yx} = \frac{B_z}{cnq} \equiv \rho_H}$

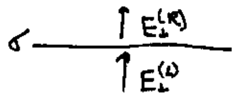
2) התנגדות הול

$$\left.\begin{array}{l} E_y = \frac{V_y}{l_y} \\ J_x = \frac{I_x}{l_y l_z} \end{array}\right\} \boxed{V_y = \frac{B_z}{nqcl_z} I_x} \Rightarrow \boxed{R_H \equiv \frac{B_z}{nqcl_z}}$$

3) הביטוי מאפשר למדוד את nq, כולל הסימן (במודל דרודה קיבלנו אך קשר ליניארי בין $\bar{E}$ לבין $\bar{J}$: $\rho = \frac{m_e}{e^2n\tau}$, אך המטען היה בריבוע ולכן אי-אפשר היה להסיק סימן).

VII אי-רציפות בשדה המגנטי במעבר דרך משטח זרם

אחת מהתוצאות החשובות באלקטרוסטטיקה. היתה שבמעברים דרך משטח הטעון

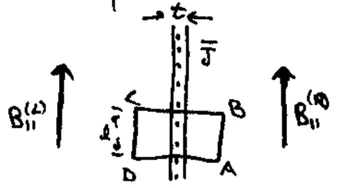


בצפיפות מטען משטחית σ יש קפיצה (ברכיבי השדה המאונכים למשטח):

$$\boxed{\Delta E = E_\perp^{(R)} - E_\perp^{(L)} = 4\pi\sigma}$$

באותו אופן נסתכל על רכיבי השדה המגנטי המשיקים למשטח דרכו זורם זרם חשמלי.

נבנה לולאת אמפר מסביב למשטח דרכו עובר זרם $\bar{J}$ בכיוון ⊙.



$$\oint_{ABCDA} \bar{B}\cdot d\bar{s} = \ell B_\parallel^{(R)} - \ell B_\parallel^{(L)} = \frac{4\pi}{c} I_{enc} = \frac{4\pi}{c}\left(J\cdot \overbrace{\ell t}^{s}\right)$$

נגדיר את j כצפיפות זרם משטחית:

$$\boxed{j \equiv J\cdot t}$$

וקיבלנו ביטוי מאוד דומה לביטוי האלקטרוסטטי:

$$\Rightarrow \boxed{\Delta B_\parallel = B_\parallel^{(R)} - B_\parallel^{(L)} = \frac{4\pi}{c} j}$$

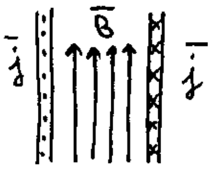
ואם המשטח הזה הוא הדבר היחיד במרחב, אז משיקולי סימטריה השדות משני צידיו יהיו בדיוק מחצית (בגודל) מהקפיצה:

$$\begin{cases} \bar{B}^{(R)} = \frac{2\pi}{c} j\,\hat{z} \\ \bar{B}^{(L)} = -\frac{2\pi}{c} j\,\hat{z} \end{cases}$$

בעזרת הקפיצה הזו אפשר לבנות מבנה אנלוגי לקבל לוחות:

כשמסכמים את התרומות של שני הלוחות:

$$\boxed{\bar{B} = \begin{cases} \frac{4\pi}{c} j\,\hat{z} & \text{בין הלוחות} \\ 0 & \text{מחוץ ללוחות} \end{cases}}$$



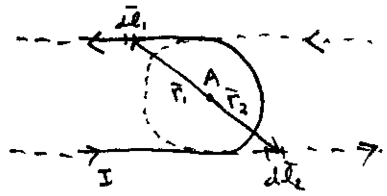
VIII זרמי דמות

כמו שעבדנו עם מטעני דמות, במגנטיות אפשר לעבוד עם זרמי דמות (תיל שיקוף):

*) נמצא את השדה המגנטי בנקודה A:

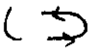
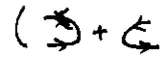
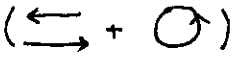
1 $$d\bar{B} = \frac{I}{c}\frac{d\bar{\ell}\times\bar{r}}{r^2}$$

2 $$\left.\begin{array}{l} d\bar{\ell}_2 = -d\bar{\ell}_1 \\ \bar{r}_2 = -\bar{r}_1 \end{array}\right\} d\bar{B}_2 = \frac{I}{c}\frac{d\bar{\ell}_2\times\bar{r}_2}{r_2^2} = \frac{I}{c}\frac{(-d\bar{\ell}_1)\times(-\bar{r}_1)}{(-r_1)^2} = d\bar{B}_1$$



בונים את תיל השיקוף כדי לספק סימטריה לבעיה, כמו שמקבלים בסעיף 2.

עכשיו אפשר לפשט את הבעיה; בעזרת עיקרון הסופרפוזיציה נהפוך את המבנה הזה למשהו מוכר יותר שאת השדה שלו אנחנו כבר מכירים:

3 $B_z($  $) = \frac{1}{2}B_z($  $) = \frac{1}{2}B_z($  $) = \frac{1}{2}B_z($  $) =$

$$= \frac{1}{2}B_z(\text{לולאת זרם + 2 תילים ישרים}) = \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{2I}{cR} + \frac{2\pi I}{cR}\right) = \frac{I}{cR}(2+\pi)$$

4 כיוון השדה המגנטי ($\hat{z}$) נבחר, כרגיל, לפי כלל יד-ימין.

IV אלקטרומגנטיות ויחסות פרטית

ברגע שבכח לורנץ יש התייחסות למהירות $\bar{F}=q(\bar{E}+\frac{\bar{V}}{c}\times\bar{B})$ ניתן לראות שאלקטרומגנטיות היא תופעה יחסותית. במערכות מסוימות, בהן החלקיק אליו מסתכלים נמצא בתנועה נראה שפועל עליו כח מגנטי ש"יעלם" ברגע שנעבור למערכת המנוחה של החלקיק. בעצם, השדה המגנטי והשדה החשמלי הם שני אספקטים של אותה תופעה - תלוי באיזו מערכת מסתכלים.

I תזכורות מיחסות פרטית

- מהירות יחסותית ופקטור γ:

$$\boxed{\bar{\beta}=\frac{\bar{V}}{c}\ ,\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

- התכווצות לורנץ: מוט באורך L_0 במנוחה מתקצר בתנועה:

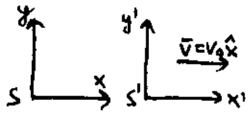
$$\boxed{L=\frac{L_0}{\gamma}\leq L_0}$$

- התארכות הזמן: שעון במנוחה מתקתק מהר יותר משעון בתנועה:

$$\boxed{t=\gamma t_0\geq t_0}$$

- טרנס' קואורדינטות: אם 'S נעה במהירות $\bar{V}=V\hat{x}$ יחסית ל-S:

$$\boxed{\begin{cases}t'=\gamma(t-\frac{\beta}{c}x)\\ x'=\gamma(x-\beta ct)\\ y'=y\\ z'=z\end{cases}}$$



- חיבור מהירויות: במקרה בו 'S נעה במהירות $\bar{V}=V\hat{x}$ יחסית ל-S ולגוף יש מהירות נתונה $\bar{u}=u(x,y,z)$ במערכת S: מהירות הגוף במע' 'S:

$$\boxed{u_x'=\frac{u_x-V}{1-\frac{Vu_x}{c^2}}\ ,\quad u_y'=\frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1-\frac{Vu_x}{c^2}}\ ,\quad u_z'=\frac{1}{\gamma}\frac{u_z}{1-\frac{Vu_x}{c^2}}}$$

המהירות בה נעה מערכת ① במערכת המנוחה של ②:

$$\boxed{\beta_{12}=\frac{\beta_1-\beta_2}{1-\beta_1\beta_2}\ ,\quad \gamma_{12}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta_{12}^2}}=\gamma_1\gamma_2(1-\beta_1\beta_2)}$$

II מטען חשמלי ותורת היחסות

המטען החשמלי עצמו הוא אינווריאנטי תחת טרנס' לורנץ: בכל מערכת מטען החלקיק לא משתנה והמטען הכולל במערכת לא משתנה.

מה שכן משתנה הוא צפיפות המטען. המטען החשמלי תלוי בצפיפות המטען ובנפח, והנפח תלוי בשטח החתך ובאורך. שטח החתך (של תיל, של גליל וכו') בד"כ מאונך לכיוון המהירות ולכן לא משתנה בטרנס' לורנץ. האורך, לעומת זאת, כן משתנה.

אם נסתכל על תיל ניטרלי במע' המנוחה שלו: $\lambda=\lambda^++\lambda^-=0$ ונניח יזרום זרם, כך שהאלקטרונים בצפיפות λ^- נעים במהירות V_0, אזי בכל מערכת אחרת נקבל:

ב-'S $\lambda^{+'}$ בתנועה:
$$Q^+=\lambda^+L_0=\lambda^{+'}L=\lambda^{+'}\frac{L_0}{\gamma}\quad\Rightarrow\quad\lambda^{+'}=\gamma\lambda^+$$

ב-'S $\lambda^{-'}$ במנוחה!
$$Q^-=\lambda^{-'}L_0=\lambda^-\frac{L_0}{\gamma}\quad\Rightarrow\quad\lambda^{-'}=\frac{1}{\gamma}\lambda^-$$

ולכן נקבל שהתיל טעון עכשיו חיובית: $\lambda'=\lambda^{+'}+\lambda^{-'}=\lambda(\gamma-\frac{1}{\gamma})=\lambda\gamma(1-\frac{1}{\gamma^2})=\lambda\gamma\beta^2$

באופן כללי:

צפיפות מטען בתנועה גדולה יותר בפקטור γ מצפיפות מטען במנוחה.

$\boxed{III}$ טרנספורמציה של השדות

כאשר מערכת 'S נעה במהירות $\bar{\beta}$ חד-מימדית יחסית למערכת S:

כאשר מפרקים את השדות לרכיבים מקבילים וניצבים למהירות:

$$\boxed{\begin{cases}\bar{E}'_{\parallel} = \bar{E}_{\parallel} \\ \bar{E}'_{\perp} = \gamma(\bar{E}_{\perp} + \bar{\beta}\times\bar{B}_{\perp})\end{cases} \qquad \begin{cases}\bar{B}'_{\parallel} = \bar{B}_{\parallel} \\ \bar{B}'_{\perp} = \gamma(\bar{B}_{\perp} - \bar{\beta}\times\bar{E}_{\perp})\end{cases}}$$

כאשר מסתכלים על כל רכיב:

$$\boxed{\begin{cases}E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z) \\ E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y)\end{cases} \qquad \begin{cases}B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z) \\ B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y)\end{cases}}$$

<u>מקרה מיוחד</u>: אם קיימת מערכת S שבה $\bar{B}=0$ אזי בכל מערכת אחרת 'S הנעה במהירות $\bar{v}$ יחסית ל-S מתקיים:

$$\boxed{\begin{cases}\bar{E}'_{\parallel} = \bar{E}_{\parallel} \\ \bar{E}'_{\perp} = \gamma\bar{E}_{\perp}\end{cases} \qquad \begin{cases}\bar{B}'_{\parallel} = 0 \\ \bar{B}'_{\perp} = -\gamma\bar{\beta}\times\bar{E}_{\perp}\end{cases}}$$

ובין השדה $\bar{E}'$ לבין השדה $\bar{B}'$ מתקיים הקשר הפשוט:

$$\boxed{\bar{B}' = -\bar{\beta}\times\bar{E}'}$$

ואם קיימת מערכת S שבה $\bar{E}=0$ אזי ב-'S:

$$\boxed{\begin{cases}\bar{E}'_{\parallel} = 0 \\ \bar{E}'_{\perp} = \gamma\bar{\beta}\times\bar{B}_{\perp}\end{cases} \qquad \begin{cases}\bar{B}'_{\parallel} = \bar{B}_{\parallel} \\ \bar{B}'_{\perp} = \gamma\bar{B}_{\perp}\end{cases}}$$

$$\boxed{\bar{E}' = \bar{\beta}\times\bar{B}'}$$

<u>טרנספורמציה של הכוחות</u>

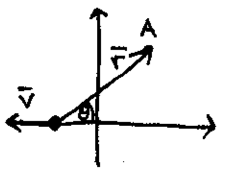
טרנס' הכוחות בעצם נגזרת מטרנס' השדות:

גם כאן מפרקים את הכח לרכיבים בכיוון ובניצב למהירות.

$$\boxed{\begin{cases}\bar{F}'_{\parallel} = \bar{F}_{\parallel} \\ \bar{F}'_{\perp} = \gamma\bar{F}_{\perp}\end{cases}}$$

$\boxed{IV}$ שדות של מטען חשמלי בתנועה

נחשב את השדה החשמלי שיוצר חלקיק טעון הנע במהירות $\bar{v}$ על ציר $\hat{x}$, בנקודה A:



$$\boxed{\bar{E} = \frac{q\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left[1-\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\right]^{1.5}}\frac{\hat{r}}{r^2}}$$

כיוון שקיימת מערכת בה החלקיק בתנועה ו- $B'=0$, נוכל לחשב לפי:

$$\bar{B} = -\bar{\beta}\times\bar{E}$$

$\boxed{V}$ 4-וקטור הזרם

אם ρ_0 הוא צפיפות המטען במע' המנוחה של המטען, אז במע' שבה המטען נע במהירות $\bar{u}$, צפיפות המטען תהיה (כאשר $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$):

$$\rho = \gamma_u \rho_0$$

ואז נקבל גם שינוי בצפיפות הזרם:

$$\bar{J} = \rho\bar{u} = \gamma_u \rho_0 \bar{u}$$

ביחד עם 4-וקטור המהירות $U_\mu = (\gamma_u c, \gamma_u \bar{u})$ נקבל גם לזרם 4-וקטור:

$$\boxed{J_\mu = \rho_0 U_\mu = (\rho_0 \gamma_u c, \rho_0 \gamma_u \bar{u}) = (\rho c, \bar{J})}$$

V השראות

I חוק פרדיי: שדה מגנטי המשתנה בזמן מייצר שדה חשמלי.

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{כא"מ}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}}$$

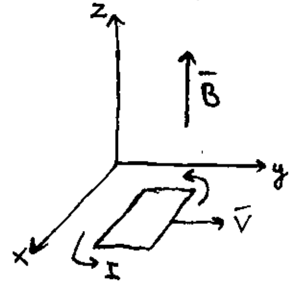
עם נציב לולאה כלשהי בשדה מגנטי משתנה נקבל כא"מ מושרה:

כאשר השטף המגנטי Φ מחושב לפי: $\Phi=\int_s \bar{B}\cdot d\bar{a}$

חוק לנץ

זהו חוק שמדבר על הכיוון של הכא"מ ושל הזרם המושרה.

נסתכל על לולאה הנעה במהירות $\bar{V}=V\hat{y}$ בשדה מגנטי משתנה $\bar{B}=B(y)\hat{z}$ שקטן לאורך $\hat{y}$. זה אומר שגם השטף Φ קטן לאורך $\hat{y}$.



$$\left.\begin{array}{l}\Phi>0\\ \frac{d\Phi}{dt}<0\end{array}\right\}\ \mathcal{E}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}>0$$

לפי כלל יד-ימין סביב השדה המגנטי מקבלים את כיוון הזרם בלולאה.

הזרם החשמלי שמושרה בלולאה יוצר שדה מגנטי נוסף (שכיוונו בתוך הלולאה כלפי מעלה) שמנסה לפצות על הירידה בשטף המגנטי.

אם הזרם המושרה היה בכיוון הפוך הוא היה יוצר שדה מגנטי כלפי מטה שהיה מקטין עוד יותר את $\bar{B}(y)$ ⇐ השינוי בשטף היה גדול יותר ⇐ ה-$\mathcal{E}$ המושרה היה גדל ⇐ היינו מקבלים תהליך אינסופי שמחזק את עצמו, וזה לא מגונס.

II השראות הדדית

אם יש מערכת של N מעגלים עם זרמים I_i $(i=1,2,\ldots,N)$ אזי ההשראות ההדדית בין מעגל i לבין מעגל j נתונה ע"י:

$$\boxed{M_{ij}=\frac{\Phi_{ij}}{cI_j}=M_{ji}}$$

כאשר Φ_{ij} הוא השטף המגנטי שעובר דרך i כתוצאה מהשדה של j.

ההשראות ההדדית יוצר $\mathcal{E}$ מושרה:

$$\boxed{\mathcal{E}_{ij}=-M_{ij}\frac{dI_j}{dt}}$$

היחידות של השראות הדדית הן $\frac{sec^2}{cm}$ ב-cgs ו-$\text{henry}\equiv\Omega\cdot s$ ב-MKS.

השראות עצמית

כאשר הזרם I דרך לולאה אחת c משתנה ישנו שינוי בשטף המגנטי דרך הלולאה c עצמה ולכן נוצר $\mathcal{E}$ מושרה בלולאה:

$$\boxed{L=\frac{\Phi}{cI}}$$

$$\boxed{\mathcal{E}=-L\frac{dI}{dt}}$$

האנרגיה של משרן-

כאשר משרן הוא יצור שכאשר עובר דרכו זרם יש לו השראות עצמית.

$$\boxed{U=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{8\pi}\int_V B^2 dV}$$

שיטות פתרון להשראות

הרעיון פה די פשוט. בד"כ בתחילת השאלה נותן שדה מגנטי כלשהו $\bar{B}$.

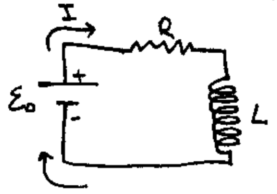
1) מחשבים את השטף של אותו שדה דרך שטח הצורה שבודקים: $\Phi = \int_S \bar{B}\cdot d\bar{a} = \bar{B}\cdot\bar{a}$.

2) מחשבים את ה־$\mathcal{E}$: $\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$.

3) מחשבים את ההשראות: $M = \frac{\Phi}{cI}$.

4) אם רוצים זרם: מחשבים את ההתנגדות. ⇐ $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$.

אם בתחילת השאלה נותנים זרם במקום שדה, אז קודם מחשבים את השדה לפי הזרם (בד"כ יבוא בצורה סימלית כלשהי שהשדה שלה כבר חושב בעבר).



III מעגלי RL עם תלות בזמן

אם ננסה להגדיל את הזרם: $\frac{dI}{dt}>0 \Rightarrow \mathcal{E}_L<0$.

" " להקטין " " : $\frac{dI}{dt}<0 \Rightarrow \mathcal{E}_L>0$.

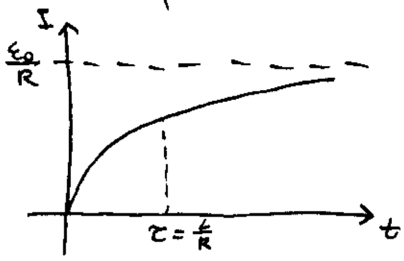
באופן כללי, לפי קירכהוף, נקבל משוואת מתחים: $\mathcal{E}_0+\mathcal{E}_L-IR = \mathcal{E}_0 - L\frac{dI}{dt} - IR = 0$

ומכאן נחלץ את מד"ר המעגל:

$$\Rightarrow \dot{I} + \frac{R}{L}I = \frac{\mathcal{E}_0}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$

מקבלים מעגל בו הזרם גדל באופן אקספוננציאלי עד שהוא מגיע לזרם מקסימלי של $I(\infty) = \frac{\mathcal{E}_0}{R}$. זה הזרם שהיינו מקבלים אם לא היה את הסליל, כך שאפשר לחשוב על הסליל כעל גורם מעכב של הזרם.



מקדם הדעיכה של המעגל, כמו במעגלי RC יוגדר לפי האקספוננט: $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$

אם ננתק בבת-אחת את המעגל הזרם יפול במהירות אינסופית: $\frac{dI}{dt}\to-\infty$ והסליל ינסה לשמור את הזרם הולך בעזרת השראת $\mathcal{E}$ אינסופי: $\mathcal{E}_L\to\infty$ ⇐ זיק מטורף.

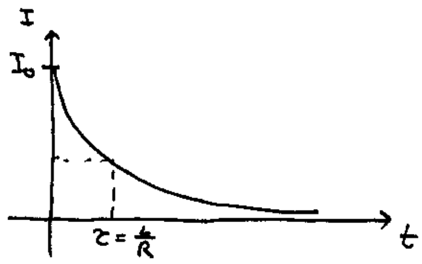
RL - מעגל פריקה

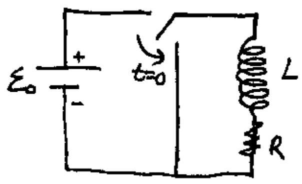
תנאי ההתחלה של המעגל יהיו תנאי הסיום של הטעינה:

$$-L\frac{dI}{dt} - IR = 0$$

$$\Rightarrow \dot{I} + \frac{R}{L}I = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$





VI משוואות מקסוול

I תיקונים למצב הסטטי

במצב סטטי (אלקטרוסטטיקה ומגנטוסטטיקה: $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}=\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}=0$) גם הזרמים עמידים: $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$ ראינו ש:

$$\text{(גאוס)}\quad \bar{\nabla}\cdot\bar{E}=4\pi\rho \qquad \bar{\nabla}\times\bar{B}=\frac{4\pi}{c}\bar{J}\quad\text{(אמפר)}$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{E}=0 \qquad \bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0\quad\text{(אין מטענים מגנטיים)}$$

1) התיקון של חוק פרדיי

חוק פרדיי, שנכון עבור כל עקום c והשטח s שהוא תוחם, נתן לנו: $\mathcal{E}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$

או, בצורתו האינטגרלית: $\oint_s \bar{E}\cdot d\bar{s}=-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_s \bar{B}\cdot d\bar{a}$

בעזרת חוק סטוקס נהפוך: $\oint_c \bar{E}\cdot d\bar{l}=\int_s(\bar{\nabla}\times\bar{E})d\bar{a}$ ונקבל:

$$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}}$$

הבעיה היא שבתחילת אלקטרוסטטיקה השתמשנו בכך ש- $\bar{\nabla}\times\bar{E}=0$ כדי להגדיר את הפוטנציאל φ:

$\bar{\nabla}\times\bar{E}=0 \Rightarrow \bar{E}=-\bar{\nabla}\varphi$. עכשיו צריך להגדיר מחדש את φ:

$$\bar{\nabla}\times\bar{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\times\bar{A})=-\frac{1}{c}\left(\bar{\nabla}\times\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}\times\left(\bar{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad \bar{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi \quad\Rightarrow\quad \boxed{\bar{E}=-\bar{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}}$$

קיבלנו תיקון להגדרת השדה החשמלי לפיו רואים שהוא גם נגזרת של מקום ($\nabla\varphi$) וגם נגזרת של זמן ($\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$) שכולל גם את c ⇐ השדה הוא 4-וקטור.

2) התיקון של מקסוול

בחוקים המוכרים לנו יש סתירה בין חוק שימור המטען: $\bar{\nabla}\cdot\bar{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$ לבין חוק אמפר: $\bar{\nabla}\times\bar{B}=\frac{4\pi}{c}\bar{J}$.

אם נשים div לשני הצדדים: $\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{B})=\frac{4\pi}{c}\bar{\nabla}\cdot\bar{J}=\frac{4\pi}{c}\left(-\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$

במצב הסטטי הכל טוב. גם $\bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\times\bar{B})=0$ זהותית וגם $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$.

אבל במצב דינאמי מקבלים סתירה. צד שמאל תמיד מתאפס, אבל צד ימין לא.

מקסוול תיקן את צד ימין של חוק אמפר כדי שה-div שלו יתאפס:

$$\bar{\nabla}\times\bar{B}=\frac{4\pi}{c}\bar{J}+\bar{X}$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{X}=-\frac{4\pi}{c}\bar{\nabla}\cdot\bar{J}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(4\pi\rho)\overset{\text{גאוס}}{\overset{\checkmark}{=}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\cdot\bar{E})=\bar{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\times\bar{B}=\frac{4\pi}{c}\bar{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}}$$

משוואות מקסוול המלאות

1) חוק קולון/גאוס :

2) חוק אמפר המתוקן :

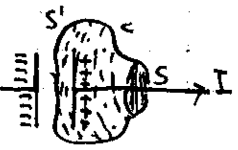
3) חוק פרדיי :

4) אין מטענים מגנטיים :

$$\boxed{\begin{aligned}&\bar{\nabla}\cdot\bar{E}=4\pi\rho\\&\bar{\nabla}\times\bar{B}=\frac{4\pi}{c}\bar{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\\&\bar{\nabla}\times\bar{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\\&\bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0\end{aligned}}$$

זרם העתק - displacement current

לפני שהוא (מישהו אחר?) הגיע לצורה הסופית $\bar\nabla\times\bar B=\frac{4\pi}{c}\bar J+\frac{1}{c}\frac{\partial\bar E}{\partial t}$ רשם מקסוול תיקון קצת שונה שבו הוא המציא סוג נוסף של זרם חשמלי לו הוא קרא זרם העתק: $\bar\nabla\times\bar B=\frac{4\pi}{c}(\bar J+\bar J_d)$.



קבל כלשהו נפרק ויוצר זרם I בתיל. אם נבנה לולאת אמפר סביב אחד הלוחות של הקבל והתיל המחובר אליו, נקבל:

$$\oint_c\bar B\cdot d\bar l=\int_s(\bar\nabla\times\bar B)d\bar a=\frac{4\pi}{c}I_{enc}=\begin{cases}\frac{4\pi}{c}I & \text{משטח } s\\ 0 & \text{משטח } s'\end{cases}$$

מקסוול אמר שאם נסתכל על קבל הלוחות שיהיה בעל שטח A, אז: $\sigma=\frac{Q}{A}$

נקבל בתוך הקבל שדה בניגוד לכיוון הזרם: $\Rightarrow E=-4\pi\frac{Q}{A}$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{4\pi}{cA}\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{4\pi}{cA}I$$

אם נשתמש במשוואה המתוקנת: $\int_{s'}(\bar\nabla\times\bar B)d\bar a=\frac{4\pi}{c}\cdot0+\int_{s'}\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\cdot da=\frac{4\pi}{cA}I\cdot A=\frac{4\pi}{c}I$

ובכן, בעזרת התיקון אנחנו מקבלים גם במשטח 's את הזרם שקיבלנו במשטח s. יופי.

II משוואות מקסוול בריק

נסתכל על משוואות מקסוול בהיעדר מטענים: $\rho=0$ וזרמים: $\bar J=0$:

$$\bar\nabla\cdot\bar E=0\qquad \bar\nabla\times\bar E=-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar B}{\partial t}$$
$$\bar\nabla\cdot\bar B=0\qquad \bar\nabla\times\bar B=\frac{1}{c}\frac{\partial\bar E}{\partial t}$$

פתרון המשוואות נותן לנו את משוואות הגלים:

$$\Rightarrow\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\bar E&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar E}{\partial t^2}\\ \nabla^2\bar B&=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar B}{\partial t^2}\end{aligned}}$$

הערות

1) המשוואות הן ליניאריות: אם $\bar E_1,\bar E_2$ הם פתרונות אז גם $(\bar E_1+\bar E_2)$ הוא פתרון.

2) הקבוע c שמופיע במשוואות מתאר את מהירות ההתקדמות של הגל ⇐ גלים אלקטרומגנטיים נעים במהירות האור.

3) כשכותבים את המשוואה ברכיבים (קרטזיים) רואים את המטריקה של מרחב מינקובסקי:

האופרטור בסוגריים נקרא דלאמברטיאן:

$$\boxed{\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\bar E\equiv\Box\bar E=0}$$

III גל אלמ"ג מישורי

אחד הפתרונות למשוואות הגלים שמתקבלות בריק הוא פתרון שבו השדות תלויים רק ב-t ובכיוון מרחבי אחד (נגיד $\hat{x}$) ולא תלויים בכיוונים האחרים ($\hat{y}, \hat{z}$).

כאשר מציבים את תנאי ההתחלה החדשים במשוואות מקסוול מקבלים:

1) רכיבי x של השדות אינם תלויים במקום או בזמן ⇐ הם קבועים בכל המרחב כל הזמן.

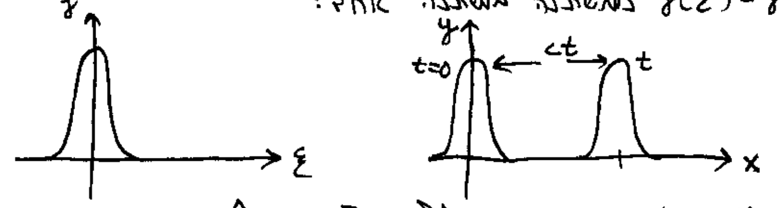
2) ללא הגבלת הכלליות אפשר לקחת $E_x=B_x=0$ ובעתיד, בגלל סופרפוזיציה, להוסיף את הפתרון הזה לכל פתרון מורכב יותר (כמו החלק ההומוג' במד"רים לא הומוגנ"ים).

3) מקבלים שני זוגות של משוואות:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} \end{cases}$$

פתרון אפשרי הוא הפונקציה $f(x-ct)$ שמתארת צורה כלשהי f שנעה במהירות c בכיוון x:

אם נתאר את $f(\xi)=f(x-ct)$ כמשתנה במשתנה אחד:



קיבלנו את ההעברה המתמטית של גל שנע ימינה על $\hat{x}$.

באותה צורה ניתן להגדיר $g(x+ct)$ שתנוע <u>שמאלה</u> על ציר $\hat{x}$.

לכן מעקרון הסופרפוזיציה נקבל: <u>פתרון הסט השמאלי</u>:

$$E_y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$$
$$B_z(x,t) = f(x-ct) - g(x+ct)$$

<u>פתרון הסט הימני</u>:

$$E_z(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct)$$
$$B_y(x,t) = -F(x-ct) + G(x+ct)$$

<u>ומתחילת הפתרון</u>:

$$E_x = B_x = 0$$

<u>הערות</u>

1) <u>סופרפוזיציה</u>: בגל אחד יכולים להיות בו-זמנית הרבה גלים (סכום פתרונות) שלא מפריעים זה לזה. אפשר גם להוסיף שדות קבועים.

<u>שים לב</u>: יתכן שדה חשמלי קבוע ללא שדה מגנטי, ושדה מגנטי קבוע ללא שדה חשמלי. אבל לא יתכן שדה אחד שאינו קבוע, ללא קיומו של השני: $\frac{\partial B_z}{\partial t} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} \neq 0$

2) <u>כיווני השדות</u>: בכל גל אלמ"ג מתקיים כלל יד-ימין בין הכיוון של $\bar{E}$, הכיוון של $\bar{B}$ וכיוון התנועה.

אם הגל מתקדם בכיוון $\hat{k}$ אזי:

$$\boxed{\bar{B} = \hat{k} \times \bar{E}}$$

3) <u>גודל השדות</u>:

$$\boxed{E^2 = B^2}$$

4) העברת אנרגיה

נגדיר את <u>וקטור פוינטינג</u>: $\bar{S}$ הוא צפיפות האנרגיה הנישאת ע"י גלי אלמ"ג (באנלוגיה לצפיפות הזרם $\bar{J}$ עבור מטען). כלומר, $\bar{S}\cdot d\bar{a}$ (דרך משטח כלשהו) הוא האנרגיה שחוצה את $d\bar{a}$ ביח' זמן; ו- $\frac{\bar{S}}{c}$ הוא צפיפות זרם התנע שנושא ע' הגלים.

$$\boxed{\bar{S} = \frac{c}{4\pi}\bar{E}\times\bar{B}}$$

<u>צפיפות האנרגיה</u>:

$$\boxed{u = \frac{1}{8\pi}(E^2+B^2)}$$

הכיוון של $\bar{S}$ הוא כיוון ההתקדמות של הגל והגודל שלו:

$$|S| = \frac{c}{4\pi}|\bar{E}\times\bar{B}| = \frac{c}{4\pi}EB = c\,\frac{E^2+B^2}{8\pi} = cu \quad \Rightarrow \quad \boxed{|S| = cu}$$

באנלוגיה לחוק שימור המטען ($\bar{\nabla}\cdot\bar{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$) ישנו <u>בריק</u> שימור אנרגיה:

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{S} = -\frac{\partial u}{\partial t}}$$

גם במצבים בהם <u>אין ריק</u> יש שימור אנרגיה, עם תיקון: <u>לא בריק</u>:

$$\boxed{\nabla\cdot\bar{S} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \bar{J}\cdot\bar{E}}$$

5) טרנספורמציית לורנץ

ל-$\bar{E}$ ו-$\bar{B}$ ישנם שני גדלים שהם אינווריאנטים תחת טרנס' לורנץ: $\bar{E}\cdot\bar{B}\ ,\ E^2-B^2$.

עבור גלי אלמ"ג שני גדלים אלו מקיימים: $\bar{E}\cdot\bar{B}=0\ ,\ E^2-B^2=0$

המשמעות: <u>אור (גל אלמ"ג) נראה כמו אור בכל מערכת</u>.

אבל: ככל שנעים מהר יותר בכיוון הגל, עוצמת השדות הולכת וקטנה. $|E|=|B|\to 0 \Leftarrow V\to c$.

המשמעות: <u>לגל אלמ"ג אין מערכת מנוחה (או: לפוטון אין מסת מנוחה)</u>.

6) קיטוב

נסתכל על פתרון כללי עבור גל שנע בכיוון $\hat{x}$

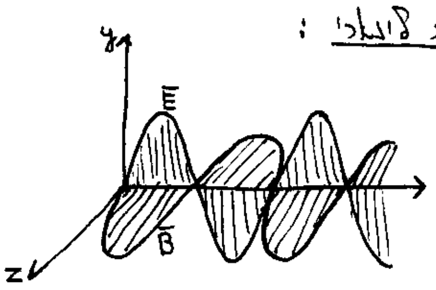
$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = f(x-ct) \\ E_z = g(x-ct) \end{cases} \quad \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = -g(x-ct) \\ B_z = f(x-ct) \end{cases}$$

ונגדיר סוגים שונים של קיטוב:

א) <u>קיטוב לינארי</u>:

$$\begin{cases} f = A\cos[k(x-ct)] = A\cos(kx-\omega t)\ , \quad \omega = kc \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \bar{E} = A\cos(kx-\omega t)\hat{y} \\ \bar{B} = A\cos(kx-\omega t)\hat{z} \end{cases}}$$



או, אם נסתכל על כיוון כללי $\bar{r}$:

$$\boxed{\bar{E}(\bar{r},t) = \bar{E}_0\cos(\bar{k}\bar{r}-\omega t)\ , \ \omega = kc}$$

ב) <u>קיטוב מעגלי</u>:

$$\begin{cases} f = A\cos(kx-\omega t) \\ g = A\sin(kx-\omega t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \bar{E} = A[\cos(kx-\omega t)\hat{y} + \sin(kx-\omega t)\hat{z}] \\ \bar{B} = A[-\sin(kx-\omega t)\hat{y} + \cos(kx-\omega t)\hat{z}] \end{cases}}$$

7) גל כדורי

כמו שבגל המישורי דרשנו תלות ב־x בלבד, הפעם נדרוש תלות ב־r בלבד בקואור׳ כדוריות.

אנחנו מחפשים פונקציה מסוג $\psi(r,t)$ שתקיים $\nabla^2\psi=\frac{1}{c}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$. בקואור׳ כדוריות: $\nabla^2\psi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)$.

אז הפונקציה $r\psi$ תקיים את משוואת הגלים. ניקח פתרון כללי:

$$r\psi(r,t)=f\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(r,t)=\frac{f\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r}}$$

מה שמקבל זה גל כדורי שהאמפליטודה שלו יורדת כמו $\frac{1}{r}$,

כך שהאינטנסיה של השדה תדעך כמו $\frac{1}{r^2}$.

IV משוואות מקסוול בנוכחות מטענים וזרמים

נעבוד עם משוואות מקסוול המלאות, ונגדיר את הפוטנציאלים:

$$\bar{B}=\bar{\nabla}\times\bar{A}$$

$$\bar{E}=-\bar{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$$

כשמציבים ביטויים אלה במשוואות מקבלים סט מצומד:

$$\Rightarrow\begin{cases}\nabla^2\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A})=-4\pi\rho\\ \nabla^2\bar{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}-\bar{\nabla}\left(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-4\frac{\pi}{c}\bar{J}\end{cases}$$

אתנחתא קצרה לגבי מהות של כיול

כדי לפשט את המשוואות נכייל אותן: מאחר שחשוב לנו רק $\bar{\nabla}\times\bar{A}$ נוכל להוסיף ל־$\bar{A}$ גרדיאנט של פונקציה סקלרית כלשהי χ: $\bar{A}\rightarrow\bar{A}+\bar{\nabla}\chi$. מאחר ש־ $\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\chi)=0$ בהגדרת הערך של $\bar{B}$ לא ישתנה. אבל - בשביל לכך שגם $\bar{E}$, שתלוי ב־$\bar{A}$, לא ישתנה:

$$\bar{E}=-\bar{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{A}+\bar{\nabla}\chi\right)=-\bar{\nabla}\left(\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{A}}{\partial t}$$

לכן כשמבצעים כיול מבצעים גם: $\varphi\rightarrow\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}$, כש־$\chi$ נקראת פונקצית כיול.

במקרה הנוכחי נבחר לעבוד עם <u>כיול לורנץ</u>:

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{A}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}}$$

כעת מקבלים מערכת מצומדת פשוטה יותר:

$$\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho\\ \nabla^2\bar{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\bar{J}\end{cases}}$$

פתרון המשוואות

1) במקרה הסטטי בו $\nabla^2\varphi=-4\pi\rho$ אנחנו יודעים, כאשר $\bar{R}=\bar{r}-\bar{r}'$:

$$\varphi(\bar{r})=\int\frac{\rho(\bar{r}')}{R}d\bar{r}'$$

2) אם $\rho=0$ אז φ מקיימת משוואת גלים שאחד מפתרונותיה הוא גל כדורי:

$$\varphi(R,t)=\frac{f\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R}$$

3) הפתרון המלא של המשוואה $\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho$ הוא שילוב של פתרונות 1,2.

נעבור ל־ $\rho=\rho(\bar{r},t)$ ובאופן דומה נפתור את שתי המשוואות המצומדות:

$$\boxed{\begin{cases}\varphi(\bar{r},t)=\int\frac{\rho\left(\bar{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{R}d^3r'\\ \bar{A}(\bar{r},t)=\frac{1}{c}\int\frac{\bar{J}\left(\bar{r}',t-\frac{R}{c}\right)}{R}d^3r'\end{cases}}$$

$\boxed{V}$ משוואות מקסוול בחומר

כשהצבנו חומרים מבודדים בשדה חשמלי (עמ' $\boxed{14}$) ראינו שמתרחשות שתי תופעות:

1) השראה של דיפולים חשמליים: צפיפות קיטוב: $\bar{p} = \alpha\bar{E} \Rightarrow \bar{P} = N\bar{p} = N\alpha\bar{E} \equiv \chi_e\bar{E}$

2) הכוונה של דיפולים קיימים: בטמפ' נתונה T: $\bar{p} = \frac{Np^2}{k_BT}\bar{E} \equiv \chi_e\bar{E}$

בשני המקרים כיוון הקיטוב $\bar{p}$ הוא בכיוון השדה החשמלי $\bar{E}$.

- חומר מבודד בשדה מגנטי

גם כאן נקבל שתי תופעות דומות לתופעות החשמליות, הפועלות על מומנט הדיפול המגנטי $\bar{m}$:

1) השראה של מומנט דיפול מגנטי $\Delta\bar{m}$

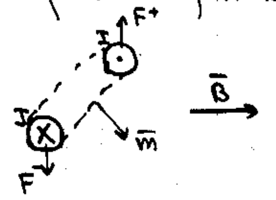
מהסתכלות פשטנית (שגויה) על מודל האטום רואים קשר בין הדיפול המגנטי לבין התנע הזויתי של האלקטרון: $\bar{m} = -\frac{e}{2mc}\bar{L}$. כשמציבים את האטום בשדה מגנטי מופעל עליו מומנט כוח שמשנה את התנע הזויתי ואת הדיפול:

$$\boxed{\Delta m = -\frac{e}{2mc}\Delta L = -\frac{e^2R^2}{4mc^2}B}$$

כאשר m הוא מסת האלקטרון ו-R רדיוס הסיבוב שלו סביב הגרעין.

מסקנה איכותית: הפעלת השדה המגנטי הקטינה את הדיפול המגנטי - קיבלנו מעין מגנט הפוך.

לתופעה הזו קוראים דיאמגנטיות. חתך דק של לולאת זרם:



2) הכוונה של דיפולים קיימים

בדומה לדיפולים החשמליים בשדה חשמלי, שדה מגנטי חיצוני ינסה לכוון מומנט קיים.

בטמפרטורה נתונה T קיים הקשר:

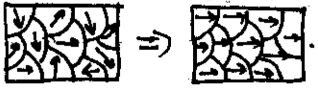
$$\boxed{\bar{M} = N\bar{m} = \frac{Nm^2}{k_BT}\bar{B}}$$

ולתופעה זו, המנסה לכוון את הקיטוב בכיוון השדה, קוראים פאראמגנטיות.

בחומרים אמיתיים מתרחשות שתי התופעות. אם ההשראה חזקה יותר מההכוונה החומר יהיה דיאמגנטי; ההפך - פאראמגנטי, כיוון שפאראמגנטיות תלויה בטמפ', שינוי הטמפ' של חומר יכולה לשנות את טיבו.

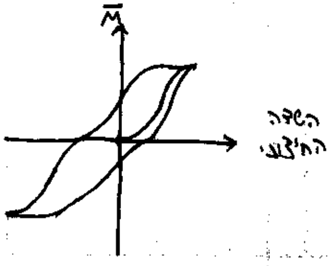
- פרומגנטיות

בחומרים מסוימים (ברזל, ניקל ועוד) יש מומנט דיפול מגנטי באופן טבעי. מתחת לטמפ' קירי האינטראקציה ההדדית בין המומנטים המגנטיים חזקה מספיק כדי לכוון אותם באותו כיוון. החומר יתחלק לאזורים מכוונים וכשנשים אותו בשדה חיצוני המומנטים יתכוונו בכיוון השדה.



לולאת חשל

ככל שמחזקים את השדה החיצוני המומנטים יתכוונו יותר, עד למצב רוויה. אם נקטין אח"כ את השדה אז הכיוונון יתחיל להתפרק, אבל לא לגמרי - תישאר מעין "חותמת" של השדה. אם נפעיל את השדה בכיוון השני נקבל הכוונה סימטרית של המומנטים בכיוון השדה החדש.



- השדות האלקטר"מ בחומר

בחומרים דיאלקטריים (עמ' $\boxed{15}$) פירקנו את המטען הכולל ρ למטענים חופשיים ρ_f ומטענים מושרים ρ_p, ובעזרתם הגדרנו את השדה החופשי $\bar\nabla\cdot\bar D = 4\pi\rho_f$ ואת הקיטוב: $\rho_p = -\bar\nabla\cdot\bar P$.

כמו כן הגדרנו קשר בין $\bar E$ לבין $\bar D$: $\bar E = \frac{\bar D}{1+4\pi\chi_e} \equiv \frac{\bar D}{\epsilon}$ והגדרנו את <u>המקדם הדיאלקטרי</u>

$\epsilon = 1+4\pi\chi_e$ (כאשר $\epsilon \geq 1$ ו- $\epsilon = 1$ בריק).

באופן דומה נגדיר עבור השדה המגנטי:

$$\boxed{\bar J = \bar J_f + \bar J_p + \bar J_m}$$

$\bar J_f$ - הזרם החופשי.

$\bar J_p$ - הזרם שנוצר מהתנועה של הדיפולים החשמליים.

$\bar J_m$ - אותם זרמים קשורים (מעגליים) שגורמים למומנט המגנטי $\bar M$.

ניתן לראות (עמ' <u>78</u> בשיעורים) שקיימים הקשרים הבאים:

$$\boxed{\bar J_m = c\,\bar\nabla\times\bar M}$$

$$\boxed{\bar J_p = \frac{\partial\bar P}{\partial t}}$$

בעזרתם ניתן להגיע להגדרה של השדה המגנטי החופשי $\bar H$:

$$\boxed{\bar H = \bar B - 4\pi\bar M}$$

ולמצוא קשר בין השדה החשמלי החופשי $\bar D$, השדה המגנטי החופשי $\bar H$ והזרמים החופשיים $\bar J_m$:

שנראה כמו משוואת אמפר, אבל חופשי:

$$\boxed{\bar\nabla\times\bar H = \frac{4\pi}{c}\bar J_f + \frac{1}{c}\frac{\partial\bar D}{\partial t}}$$

במגנטיות נהוג להגדיר <u>סוספטיביליות</u> הפוך מבחשמל:

$$\boxed{\bar M = \chi_m\bar H} \quad \text{vs.} \quad \bar P = \chi_e\bar E$$

ו-μ הוא הפרמאביליות המגנטית:

$$\Rightarrow \boxed{\bar B = \bar H + 4\pi\bar M = (1+4\pi\chi_m)\bar H \equiv \mu\bar H}$$

<u>סיכום</u>

אם מעוניינים רק בגדלים שבמטענים החופשיים ρ_f ובזרמים החופשיים $\bar J_f$ ניתן לרשום את משוואות מקסוול:

$$\boxed{\begin{cases}\bar\nabla\cdot\bar D = 4\pi\rho_f\\ \bar\nabla\times\bar E = -\frac{1}{c}\frac{\partial\bar B}{\partial t}\end{cases} \qquad \begin{cases}\bar\nabla\times\bar H = \frac{4\pi}{c}\bar J_f + \frac{1}{c}\frac{\partial\bar D}{\partial t}\\ \bar\nabla\cdot\bar B = 0\end{cases}}$$

כשבחומרים ליניאריים ניתן להמיר את $\bar D, \bar H$ ל- $\bar E, \bar B$:

$$\boxed{\bar D = \epsilon\bar E \quad , \quad \bar H = \frac{1}{\mu}\bar B}$$

<u>גלים בחומר</u>

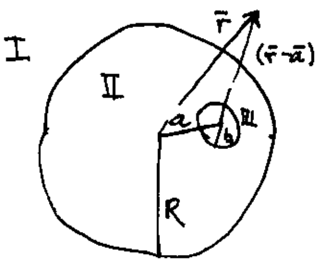
אם אין מטענים וזרמים חופשיים ($\rho_f = \bar J_f = 0$) נקבל שוב את משוואת הגלים, אבל הפעם <u>הגל האלקטרומגנטי שנקבל ינוע במהירות $\frac{c}{n}$, כאשר $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ הוא מקדם השבירה של החומר</u>.

VII נקודות לשים לב

I חישוב שדות

1) כשמחשבים שדה חשמלי יש חשיבות לבחירת הכיוון היחסי של $\bar{r}$. כשאומרים "השדה שיוצר מטען q בנקודה A" צריך ש- $\bar{r}$ יהיה בכיוון $A \xleftarrow{\bar{r}} q$. אם $\bar{r}$ בכיוון $A \longrightarrow q$ הוא צריך להילקח עם סימן שלילי. $\bar{E}_{A\to q} = -\frac{q}{r^2}\hat{r}$. $\bar{E}_{q\to A} = \frac{q}{r^2}\hat{r}$.

2) כשעושים חור בתוך מבנה גיאומטרי מוכר כלשהו, עושים סופרפוזיציה של שדות, כאשר בחור שמים מטען הפך למטען ג'יצור הגיאומטרי.



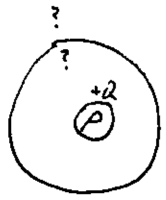
$$\bar{E} = \sum \frac{q_j}{|\bar{r}-\bar{r}_j|}(\widehat{\bar{r}-\bar{r}_j})$$

$$\text{I}: \ \bar{E} = \left(\tfrac{4}{3}\pi R^3\rho\right)\frac{1}{r^2}\hat{r} - \left(\tfrac{4}{3}\pi b^3\rho\right)\frac{1}{|\bar{r}-\bar{a}|^2}(\widehat{\bar{r}-\bar{a}})$$

$$\text{II}: \ \bar{E} = \left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\rho\right)\frac{1}{r^2}\hat{r} - \left(\tfrac{4}{3}\pi b^3\rho\right)\frac{1}{|\bar{r}-\bar{a}|^2}(\widehat{\bar{r}-\bar{a}}) =$$
$$= \left(\tfrac{4}{3}\pi\rho\right)r\hat{r} - \left(\tfrac{4}{3}\pi b^3\rho\right)\frac{1}{|\bar{r}-\bar{a}|^2}(\widehat{\bar{r}-\bar{a}})$$

$$\text{III}: \ \bar{E} = \left(\tfrac{4}{3}\pi r^3\rho\right)\frac{1}{r^2}\hat{r} - \left(\tfrac{4}{3}\pi(r-a)^3\rho\right)\frac{1}{|\bar{r}-\bar{a}|^2}(\widehat{\bar{r}-\bar{a}}) =$$
$$= \tfrac{4}{3}\pi\rho\bar{r} - \tfrac{4}{3}\pi\rho(\bar{r}-\bar{a}) = \tfrac{4}{3}\pi\rho\bar{a}$$

3) כשעוטפים מטען בקליפה מוליכה כלשהי (בד"כ כדורית מסביב לכדור) יתכנו שלושה מצבים:



א) טעונה - ואז מחלקים את המטען הכולל עליה ל"אנטי-מטען" של הכדור, ושל היתר.

ב) ניטרלית - ואז הכדור משרה עליה "אנטי-מטען" בצד הקרוב אליו ואת המטען שלו בצד השני - כלומר מיסוך.

ג) מוארקת - ואז מתפקדת כבלוע באורכיי - סה"כ המטען עליה שווה והפוך בסימן למטען הכדור, והפוטנציאל עליה מתאפס. לכן אחרי הקליפה השדה והפוטנציאל יתאפסו.

II מטעני דמות

1) כשמחשבים אנרגיה של המערכת - צריך לחשב את הבאת המטען הנקודתי מאינסוף לנקודה בה הוא נמצא, בנוכחות מטען הדמות שלו.

אם יש שני מטענים - קודם מטען אחד, ואז את המטען השני בנוכחות המטען הראשון (שכבר נמצא בנקודה שלו) ומטעני הדמות.

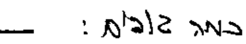
ומספיק לחשב כך את האנרגיה בציר אחד (x).

אם יש כמה מישורים ⇐ גם בצירים שלהם.

מטעני דמות - המשך

2) מציאת צפיפות מטען מושרה: $\varphi \to E_\perp \to \sigma$. מוצאים פוטנציאל; $E=-\nabla\varphi$; מוצאים את השדה המאונך למוליך: $E_\perp$; $4\pi\sigma = E_\perp$.

3) ~~ב~~תמיד לשים לב שהפוטנציאל (וכל דבר אחר בעצם) מחושב עם r וכשעובדים בקואו' קרטזיות: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ואם המטען/גוף נמצאים במרחק מסוים מהראשית (נגיד, b מעל $z=0$), $r=\sqrt{x^2+y^2+(z-b)^2}$.

4) גופים מורכבים שהם "סופרפוזיציות" של כמה גופים:  למשל, ניצור מטעני דמות עבור כל סוג גוף (בשביל המישור ובשביל הכדור) וניצור מטעני דמות בשניהם...

III שדות חומריים וחומרים דיאלקטריים

1) כשמכניסים חומר כלשהו לתוך קבל (גם מוליך, גם דיאלקטרי) - הקיבול גדל.

2) בשאלות על קבלים אם רוצים את הכח שמפעיל השדה בקבל אז:

א) אם הקבל מנותק ממקור מתח: $F=-\frac{dU}{dx}$

ב) אם הקבל מחובר למקור מתח: $F=-\frac{dU}{dx}+V\frac{dQ}{dx}$

כאשר dx הוא מה ש"משנים" בקבל (מרחק בין לוחות, עומק הכנסת לוח וכו' - לא מדויק, כי x בכיוון בו מזיזים את רכיב הכח. בכ"ז השאלה מתאימה).

$\in$ $U=\frac{Q^2}{2C}=\frac{CV^2}{2}$

3) כשמחשבים קבלים כדוריים/גליליים וכו', $V=\varphi_a-\varphi_b$ אם .

4) בשאלות של שדות בחומרים ושדות חופשיים:

א) חישוב המטען הכולל ושווה המטען החופשי q_f $Q=Q_f$ (כי בכ"ז מדובר פה כלשהו על קבל. אם לא קבל - לחשב שוב).

ב) $\bar{D}=4\pi\sigma_f=4\pi\frac{Q_f}{A}$. זה השלב הבא. קודם מוצאים את השדה החופשי.

ג) $\bar{E}=\frac{\bar{D}}{\varepsilon}$. אם יש כמה סוגים של חומרים ε_i למצוא את E_i בנפרד. כמו סופרפוזיציה.

ד) $\bar{P}=\frac{\bar{D}-\bar{E}}{4\pi}=\frac{1}{4\pi}(\varepsilon-1)\bar{E}$.

ה) צפיפויות מטען: $\rho_f=\frac{\bar{\nabla}\cdot\bar{D}}{4\pi}$, $\rho_b=\frac{\bar{\nabla}\cdot\bar{P}}{4\pi}$, צפיפויות משטחיות σ_f ו-σ_b לחשב ע"פ הגבולות (שפות, קו' מפגש של חומרים) לפי $\Delta D_\perp=4\pi\sigma_f$, $\Delta E_\perp=4\pi\sigma$, $\Delta P=-\sigma_b$.

לשים לב לכיווני השדות בכיוון החיצוני - זה קובע את סימן המטען.

$\boxed{IV}$ שדות מגנטיים

1) כשמסובבים גוף עם צפיפות מטען משטחית מקבלים זרם חשמלי:

$$dI=\overset{\text{מטען}}{\downarrow}(\sigma dr)\overset{\text{מהירות}}{\downarrow}(\omega r)$$

2) כשכותבים מומנט מגנטי, $\bar{a}$ הוא השטח, גם ~~[illegible]~~ כשסובבים טבעות דקות:

$$dm=\frac{dI}{c}\cdot\bar{a}$$

השראות

1) אלגוריתם קטן: קודם מחשבים $\Phi=\int\bar{B}\cdot d\bar{a}$ על השטח. אח"כ $M=\frac{\Phi}{cI}$. I צריך להיות נתון. אח"כ $\mathcal{E}=-M\frac{dI}{dt}$, ואז $I=\frac{\mathcal{E}}{R}$. ואז אפשר גם לחשב תיקון לשדה המגנטי שנובע מהזרם המושרה. וכן, התהליך הזה יכול להמשך לעד.

חשוב: לשים לב איזה זרם לוקחים - בד"כ מקובל בשני צדדים שמשפיעים זה על זה, ואז צריך לבחור את הזרם בהתאם.

2) אפשר למצוא את הכא"מ המושרה גם דרך $\mathcal{E}=-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$